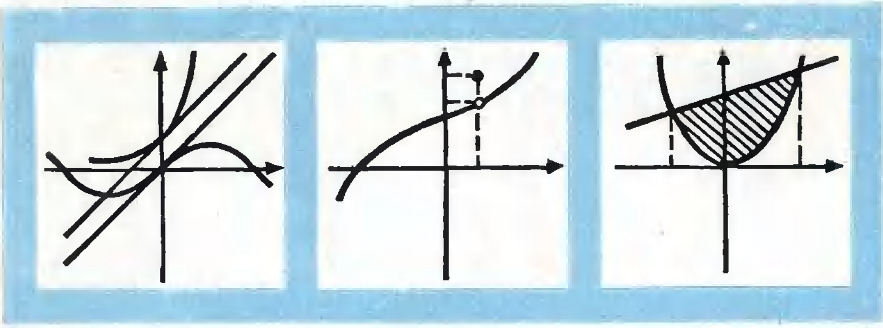


Библиотека учителя математики

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Библиотека учителя математики

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ

СОСТ. Е. Г. ГЛАГОЛЕВА
и О. С. ИВАШЕВ-МУСАТОВ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1981

ББК 74.262.6
В 74.

Рекомендовано к изданию
Главным управлением школ
Министерства просвещения СССР

Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в сред-
В74 ней школе: Сб. статей / Сост. Е. Г. Глаголева, О. С. Ивашев-Мусатов.— М.: Просвещение, 1980.— 256 с.

В статьях сборника нашли отражение различные возможности методического решения наиболее интересных и важных задач, возникающих в процессе преподавания курса алгебры и начал анализа в IX — X классах средней школы. Данные авторами рекомендации являются в основном результатом обобщения накопленного опыта.

В $\frac{60501-334}{103(03)-80}$ подписное 4306010400 ББК 74.262.6
512+517.2

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Статьи, вошедшие в сборник, разнохарактерны как по содержанию, так и по назначению. Среди них нет так называемых поурочных разработок. Это отражает мнение составителей и авторов, что в настоящий момент учителя уже прошли первый этап освоения новой программы и не нуждаются в мелочной опеке. Теперь важно дать учителю материал для размышлений, показать ему различные возможности методического решения наиболее интересных и важных задач, возникающих в процессе преподавания рассматриваемого курса.

Рекомендации, данные в статьях, являются в основном результатом обобщения накопленного опыта. Однако не все они являются бесспорными, а иногда даже противоречат друг другу. Мы сочли полезным и интересным в ряде случаев познакомить читателя с различными точками зрения по некоторым вопросам и предоставить ему возможность выбора.

Вначале помещены статьи, посвященные общим вопросам, относящимся ко всему курсу в целом. Далее идут статьи о преподавании отдельных тем и разделов. Представляется полезным, чтобы весь сборник или по крайней мере отдельные его статьи предварительно были прочитаны целиком, так как вне общего текста его фрагменты могут быть поняты неправильно.

Первая статья сборника «Особенности преподавания алгебры и начал анализа в общеобразовательной школе» носит вводный характер и касается не столько вопросов конкретного содержания курса, сколько педагогико-дидактических особенностей обучения этому курсу. Эти особенности определяются и местом курса в системе школьного математического образования — курс является завершающим, во многом — обобщающим и повторительным — и возрастными особенностями учащихся, и, разумеется, спецификой его содержания. В статье освещается вопрос о том, как надо понимать преемственность в отношении стиля и методов преподавания, вскрывается важность правильного соотношения логики и наглядно-интуитивного восприятия, выясняется особая роль дифференцированного подхода к учащимся, обсуждаются некоторые специфические стороны учебного процесса. Многие из этих вопросов имеют достаточно общий характер и относятся не только к преподаванию алгебры и начал анализа. Однако все общие положения иллюстрируются конкретными примерами, так что учитель найдет в статье не только пищу для размышлений, но и материал, который можно непосредственно использовать в преподавании.

Одной из важных задач в совершенствовании преподавания курса алгебры и начал анализа является усиление его воспитательной, мировоззренческой направленности. Этой проблеме посвящена следующая статья сборника — «Формирование материалистического мировоззрения на уроках алгебры и начал анализа». Статья содержит много конкретного материала, который можно использовать непосредственно на уроках. Однако при этом авторы надеются на чувство меры учителя. Избыточный в отношении использования на уроке материал не будет излишним, так как он, с одной стороны, поможет учителю приобрести бо́льшую ориентированность в вопросе, с другой стороны, может быть использован во внеклассной работе.

Статья «О некоторых логических трудностях курса и возможностях их преодоления» перекликается с разделом о логике и интуиции в первой статье сборника. Автор стоит на той позиции, что, хотя согласно программе элементы логики не являются предметом специального изучения в школе, внимание к ним в процессе преподавания методически целесообразно, так как снимает целый ряд трудностей, повышает доступность курса и его общеобразовательную значимость. В статье рассматриваются различные методические вопросы, связанные с применением в курсе элементов логики.

Следующая группа статей посвящена отдельным сторонам методики преподавания курса.

В статье «Организация и содержание повторения» рассматриваются повторение в начале года и текущее повторение. Разобрав особенности вводного повторения для IX и X классов, автор на конкретных примерах рассматривает различные формы этого важного этапа в преподавании курса и формулирует некоторые принципы, которые помогут учителю отобрать материал для повторения в зависимости от конкретных условий работы. Учитель также найдет здесь рекомендации по содержанию и методике текущего повторения и большое количество вопросов и упражнений. Пример организации заключительного повторения рассмотрен в статье «Систематизация знаний учащихся при заключительном повторении».

Статья «О взаимосвязи курса алгебры и начал анализа с курсом геометрии» рассматривает некоторые пути укрепления связи в преподавании двух математических предметов. Автор считает, что в некоторых случаях возможно и целесообразно проводить единые уроки, в других случаях лучше осуществить эту связь без изменения традиционного хода учебного процесса. Учитель найдет в статье также некоторые общие рекомендации по преподаванию таких тем, как «первообразная», «интеграл», «графики тригонометрических функций», «системы линейных уравнений» и др. О взаимосвязи курса алгебры и начал анализа с геометрией и физикой рассказывается также в статьях «Основные направления взаимосвязи курса «Алгебра и начала анализа» с курсом физики IX—X классов» и «Использование интеграла при изучении темы «Объемы фигур»».

Для современной школы характерны поиски в направлении повышения эффективности преподавания, совершенствования организации учебного процесса. Этот круг проблем затрагивается в статьях «Некоторые пути повышения эффективности преподавания» и «Учебное оборудование в курсе алгебры и начал анализа». В первой из них рассматривается роль пропедевтики в повышении эффективности обучения, а также рекомендуются некоторые приемы выработки навыков самостоятельной работы с книгой. В частности, автор демонстрирует методику выработки таких навыков на примере изучения вопроса об исследовании функций. Четкий план, приведенный в статье, даст учителю возможность организовать аналогичную работу при изучении других вопросов курса.

В статье об учебном оборудовании содержатся рекомендации по применению на уроках алгебры и начал анализа технических средств обучения. Изложив некоторые общие соображения о назначении диафильмов, кодопозитивов, тетрадей с печатной основой и др., автор на примерах раскрывает возможности их применения в учебном процессе. Разработка темы «Первообразная» с помощью системы средств обучения послужит учителю основой для аналогичных разработок по темам. В статье учитель найдет информацию о средствах обучения, изготовляемых промышленностью, и получит представление о том, как изготовить некоторые из них самостоятельно.

Из статьи «Проверка, оценка и учет знаний учащихся» учитель почерпнет информацию двоякого рода: с одной стороны, в статье на конкретных примерах раскрываются программные требования к знаниям учащихся. С другой стороны, в той части, где говорится об организации проверки и учета, статья носит не нормативный, а поисковый, проблемный характер. Здесь автор раскрывает, основываясь на опыте, некоторые возможности совершенствования форм и организации опроса — тематический учет знаний в форме зачета, индивидуальный содержательный учет и т. п.

В следующих статьях рассматриваются с разных точек зрения некоторые наиболее трудные вопросы курса. Так как изучение начал анализа не имеет таких многолетних традиций, как, например, изучение квадратных уравнений, важно дать учителю представление о различных методических решениях той или иной темы, предоставив ему выбор в зависимости от вкусов и реальной учебной ситуации.

Статья «Предел и непрерывность функции в курсе IX класса» раскрывает роль опоры на наглядно-смысловую сторону вопроса в повышении доступности материала, в обучении математическому языку, подчеркивает значение взаимосвязи понятий.

В статье «Некоторые рекомендации к изучению применения производной» внимание читателя обращается на возможности использования формулы приближенного вычисления значений функции для углубления знаний учащихся и повышения сознательности восприятия других вопросов этого раздела. Читатель найдет в этой статье, а также в статье «О решении задач на экстремум при изучении производной в IX классе» конкретные советы по методике решения задач на нахождение наибольших и наименьших значений функции и построению графиков функций.

Статья «Развитие функциональной линии при изучении показательной функции в X классе» раскрывает возможности использования повторного изучения показательной функции в X классе для углубления знаний о функции вообще. Содержащиеся в статье задания и вопросы могут быть с успехом использованы при изучении разделов о числовой функции, возрастании и убывании функций, обратной функции и т. п. Разбор возможных подходов к определению показательной функции перекликается со статьей о воспитании мировоззрения.

В сборнике отсутствует специальная статья о факультативных занятиях. Однако такие статьи, как «Наглядность при изучении основных понятий математического анализа» и «Применение свойств непрерывных и дифференцируемых функций при решении задач», в основном, а другие отчасти содержат материал, который достаточно полно может быть рассмотрен лишь на факультативе. Это должно показать учителю некоторую перспективу того, как можно построить факультативные занятия, не расширяя программного материала, а лишь углубляя его.

Вообще при использовании рекомендаций надо иметь в виду, что они в некоторых случаях, так сказать, избыточны. Однако мы считали, что для учителя будет полезно ознакомиться с вопросами, тесно примыкающими к программе, даже если они и выходят за рамки обязательного материала. Мы надеемся, что это поможет учителю лучше освоить все еще не очень «обкатанный» курс. Кроме того, четкое выделение обязательного для усвоения материала ни в коей мере не означает, что учитель должен в преподавании, а не только в требованиях к учащимся строго ограничиваться этими рамками. Нельзя учащихся, особенно старших классов, держать на сухомятке обязательного минимума. Вопросы, выходящие за этот минимум, чрезвычайно важны и для расширения кругозора, и особенно для воспитания интереса, любознательности.

Таким образом, в совокупности статьи сборника охватывают многие, хотя и не все, вопросы преподавания курса алгебры и начал анализа в школе.

Е. Г. Глаголева

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

1. О задачах обучения

В процессе преподавания курса алгебры и начал анализа, как и любой другой школьной дисциплины, решаются три основные задачи.

Первая связана с усвоением некоторой системы понятий, пониманием их взаимосвязи с понятиями других наук, формированием определенной системы взглядов на окружающий мир. Назовем ее образовательной задачей.

Вторая задача состоит в том, чтобы учащиеся овладели некоторой системой фактических знаний, приобрели необходимый запас конкретных сведений, овладели определенными умениями и навыками. Будем называть эту задачу учебной.

Наконец, третья задача — это задача воспитания, развития определенных качеств личности, начиная от простейших — аккуратности, внимания, умения запоминать — и кончая творческими способностями, потребностью в дальнейшем образовании, интересом к познанию вообще и к занятиям математикой в частности.

Выделение именно этих трех задач в достаточной мере условно, как и их разделение. При правильно поставленном обучении все эти три задачи решаются одновременно, в единстве. Понятно, что стать образованным человеком невозможно, не овладев определенной суммой знаний, что знания являются фундаментом не только для образования, но и для развития; с другой стороны, развитие является не только следствием, но и средством для получения знаний и образования.

Рассмотрим, каковы особенности решения этих задач при обучении старшеклассников новому для них курсу — алгебре и началам анализа, представляющиеся важными для учителя, готовящегося к преподаванию этого курса.

2. О преемственности и качественном скачке

При переходе в обучении на новую ступень — а старшие классы, несомненно, являются такой новой ступенью в школьном обучении, причем речь идет не о формальном делении школы на восьмилетнюю и среднюю, а о существенных изменениях и в учебном процессе и в участниках его — прежде всего возникает вопрос о преемственности. Преемственность в содержании и методике обучения, опора на ранее полученные знания, их развитие и закрепление являются непременным условием успешности обучения, особенно обучения математике.

Курс алгебры и начал анализа в этом смысле не представляет исключения, являясь органическим продолжением и развитием предшествующих. Однако при переходе к этому курсу и в содержании, и в подходе к изучению материала, и в методике изложения происходит некоторый «скачок». С нашей точки зрения, этого скачка не надо бояться. Наоборот, следует им воспользоваться для того, чтобы учащиеся увидели свое продвижение вперед, поняли, что они уже взрослые и переходят к изучению более сложных и более интересных вещей, причем от них потребуется и больше самостоятельности, и больше ответственности.

Надо иметь в виду, что почти такой же вред, как слишком резкие и необоснованные скачки в методике и содержании преподавания, нарушающие ход учебного процесса, приносит и излишняя «плавность», переходящая в монотонность. Известный советский психолог Н. А. Леонтьев не раз указывал как на один из существенных недостатков в организации школьного обучения на то удивительное и странное однообразие в режиме работы, уровне и качестве требований, степени опекаемости и контроля, которое наблюдается в школе с I по X класс. В результате методы обучения неминуемо приходят в противоречие с уровнем и качеством восприятия: ведь в естественном развитии учащегося, которое происходит не только под влиянием школьного обучения, со временем неизбежно происходят серьезные изменения, и старшеклассники представляют собой по сравнению с учащимися восьмилетней школы в значительной степени новый объект воспитания.

Переход к изучению курса алгебры и начал анализа, нового даже по названию, совпадает с периодом повзросления учащихся, определения их интересов и стремлений, общей жизненной позиции. Это дает возможность использовать для повышения интереса к обучению естественное стремление развивающегося ума увидеть не только количественный рост знаний, но и качественное развитие — переход на новую ступеньку.

Приступая к обучению математике в IX классе, и учителю, который берет новый класс, и учителю, «перешедшему» в этот класс со своими питомцами, необходимо с самого начала показать учащимся, что они в некотором смысле «начинают новую жизнь в математике». При этом речь должна идти не только о вступительной беседе на первом уроке; ученики должны почувствовать, что учитель сам изменил весь стиль преподавания, начиная от режима работы и кончая тоном взаимоотношений с учащимися, и от учащихся ждет нового отношения к занятиям.

3. О мотивах учения

Одной из особенностей учащихся старших классов является возросшая у них потребность в объяснении того, зачем они делают то или иное задание, изучают тот или иной вопрос, зачем они учат математику или иной предмет, зачем вообще учатся. Поэтому одним из важнейших принципов в преподавании рассматриваемого курса должно стать разъяснение учащимся цели изучения как каждого вопроса или темы, так и курса в целом.

Разъяснение цели является необходимым условием преодоления догматизма в преподавании, в обучении, который выражается в том, что учитель заставляет учащихся выполнять работу, не разъясняя ее смысла («Делайте, что велят, без разговоров!»), приучая тем самым учащихся не задумываться над смыслом заданий («Отделаюсь — и ладно!»).

Конечно, старшеклассники понимают основные цели обучения в школе: овладение культурой, подготовка к трудовой деятельности и т. д. Однако эти цели слишком общи, чтобы служить для девятиклассников стимулом; на этом этапе в этом возрасте молодые люди еще нуждаются в мотивировках более конкретных, более близких, более связанных с их непосредственными стремлениями. Поэтому в ряде случаев более действенными оказываются «прагматические» стимулы: поступить в вуз, обрадовать родителей, блеснуть перед товарищами и т. п.

Вообще потребность в выяснении цели сильно зависит от общего уровня развития ученика и колеблется от примитивного «что я буду от этого иметь» до желания выработать цель в жизни, осмыслить ее и сопоставить отдельные задачи с достижением этой цели. Одной из задач воспитания и является перевод учащихся от «детских», примитивных стремлений к сознательному обдумыванию значения того или иного поступка, своих планов, дел в жизни. Но при этом приходится отталкиваться от тех мотивов, которые уже есть у учащихся, движут ими в настоящий момент, трансформируя их в более важные и значительные.

Разумеется, придется учитывать, что разными школьниками движут разные мотивы. Одних привлекает то, что, изучив начала анализа, они поднимутся на более высокую ступень, войдут в «высшую математику». Другие, интересующиеся техникой, знают, что современное производство уже включило в свой язык не только числа и формулы, но и понятия и терминологию дифференциального исчисления. Третьи, не собирающиеся связывать свою профессию с естественными науками или техникой, особенно чутки к «гуманитарной» стороне математики; таких школьников может привлечь то, что изучение, понимание математического анализа требует большой отточенности логики, воображения и, значит, изучая его, можно развить свою способность мыслить.

Такие общие цели изучения математического анализа полезно раскрыть уже во вступительной беседе перед началом изучения курса, указав на их возможные связи с личными стремлениями учащихся.

Известно, что особую заботу вызывают у учителя учащиеся с пробелами в знаниях, с пониженным общим развитием, которое обычно сочетается с отсутствием интереса к учению, да и вообще отсутствием всякого серьезного интереса. Чтобы заинтересовать таких учащихся, иногда удается использовать переход к изучению начал анализа как «начало новой жизни», которая поможет им снять груз прошлых недоработок. Конечно, эти недоработки будут мешать ученику, и речь идет не о том, чтобы о них забыть. Однако целесообразно создать и поддерживать психологический настрой на то, что при переходе к изучению нового курса те, кто прежде занимался не очень успешно, смогут его усвоить не хуже других. Многие ученики могут всерьез заинтересоваться математикой при изучении начал анализа хотя бы потому, что последний окажется для них более интересным и содержательным, чем то, что́ они изучали в восьмилетней школе; некоторые выправятся просто потому, что повзрослели; многих смущали и отпугивали сложность и многообразие техники преобразований в курсе алгебры.

Следует учитывать и то, что слабые, «запущенные» ученики очень часто склонны преувеличивать свое незнание, превращая его в своего рода моральное оправдание бездеятельности. Учитель должен помочь учащимся избавиться от таких настроений, стараться не «ловить» их на незнании, а, наоборот, поощрять всякое, даже незначительное продвижение вперед.

Первый вопрос курса IX класса — действительные числа — очень удобен для такой активизации слабых учащихся, поскольку сведения, повторяющиеся при его изучении, очень просты и, конечно, известны всем учащимся. Вряд ли найдется ученик IX класса, который не знает свойств множества рациональных чисел, законов действий, алгоритмов деления (обращения обыкновенной дроби в десятичную), не умеет изображать рациональное число на координатной прямой и т. д. Если задавать вопросы по этому материалу в конкретной форме, то учащиеся понемногу сдвинутся с «мертвой точки».

В то же время материал о действительных числах достаточно интересен и для сильных учащихся, только их внимание нужно направить на более сложные, принципиальные моменты, а не на повторение элементарных вещей. Например, слабого ученика можно спросить, как обратить обыкновенную дробь в десятичную (на конкретном примере). Однако для обсуждения вопроса о том, какую дробь — конечную или бесконечную — мы получим, придется уже привлечь более сильную часть класса. Выяснить же самостоятельно, что запись $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ эквивалентна цепочке неравенств:

$$0 < \frac{1}{3} < 1$$
$$0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4$$
$$0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34$$
$$0{,}333 < \frac{1}{3} < 0{,}334 \text{ и т. д.},$$

сможет, по-видимому, только достаточно сильный ученик (хотя понять это может и должен каждый). Изобразить на координатной прямой числа 2, —5, $\frac{2}{5}$ и др. при конкретных значениях координат сумеет каждый ученик IX класса; рассказать «в общем виде», как изображается число $\frac{p}{q}$, сможет уже не всякий, и только единицы смогут обоснованно ответить на вопрос, верно ли положение, обратное следующему: «Каждому рациональному числу $\frac{p}{q}$ соответствует на координатной прямой единственная точка с координатой $\frac{p}{q}$».

Именно такими, различными по степени трудности вопросами можно возбудить общую активность класса, интерес всех учащихся к предмету.

4. О системности в преподавании

Чтобы поддержать, развить, укрепить этот интерес, учителю следует разъяснить учащимся общее назначение курса и его структуру. Курс начал анализа легко может быть представлен учащимся как единое целое, как взаимообусловленная система. Действительно, математический анализ — это раздел математики, в котором числовые функции изучаются средствами дифференциального и интегрального исчислений. Отсюда — необходимость начать этот курс с систематизации сведений о действительных числах. Далее естественно рассмотреть наиболее простой случай числовой функции — последовательность, на примере которой можно повторить и развить представление о функции. Но само возникновение математического анализа, его роль в науке связаны с тем, что его аппарат является инструментом изучения «реальных» функций — закономерных связей между величинами; величины же удобно считать непрерывными. Отсюда — следующее понятие курса — понятие непрерывной функции и т. д.

Так при каждой новой теме следует показывать учащимся ее место в общей системе курса.

Показ целесообразности введения того или иного понятия, необходимости изучения того или иного отдельного вопроса курса помогает поддержать интерес и активность учащихся и в тех случаях, когда изучаются так называемые вспомогательные вопросы. Возьмем, например, неравенство $|x-a|<b$. Само по себе оно ничем особенно не интересно, и изучение его не более нужно, чем изучение любого другого неравенства (например, $x^2<a$ или $\frac{x^2-1}{x+2}<$ <0). Однако с ним, как легко видеть, связано понятие окрестности, очень важное для усвоения понятий непрерывности и предела. Поэтому все, что относится к этому неравенству, должно быть усвоено всеми учащимися, а чтобы этого добиться, приходится если не показать, то хотя бы декларировать важность его изучения. Иногда возможно и целесообразно просить у учащихся «кредита», просто сказав: «В дальнейшем вам нужно будет уметь выполнять задачи: указать по графику, для каких x выполняется неравенство $|f(x)-f(1)|<0{,}1$ и т. п.», и показать, как при этом будет работать умение решать неравенство $|x-a|<b$. В других случаях уместно заметить: «Вот видите, мы когда-то мучились, упражняясь в тождественных преобразованиях, зато теперь можем, найдя выражение для производной, преобразовать его так, чтобы удобно было найти критические точки» и т. п.

Такие ссылки помогут поддержать интерес учащихся даже к тем вопросам, которые сами по себе скучны (вряд ли кого-либо увлекают упражнения на тождественные преобразования), и мобилизовать их внимание: ученик привыкает к тому, что все изучается не просто так, а для чего-то, что его знания обязательно понадобятся, а незнание обернется трудностью в дальнейшем. В курсе анализа возможности для показа такой тесной взаимосвязи изучаемых понятий очень велики. Приведем еще примеры.

Так, учащиеся к моменту начала изучения тригонометрических функций уже понимают, насколько важно знать формулы производных. При выведении формул производной квадратичной функции или корня они видели, что, кроме определения производной, при этом использовались различные формулы. Например, получив по определению $(x^2)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$, мы далее преобразовывали выражение под знаком предела, применяя тождество $(a+b)^2=$ $=a^2+2ab+b^2$*. Это можно использовать для разъяснения целесообразности вывода формул для синуса и косинуса суммы. Запи-

* Или $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

сав по определению, что $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$, и вспомнив, как мы дальше действовали с алгебраическими функциями, мы увидим, что получению формулы производной для синуса препятствует незнание формул тождественных преобразований для тригонометрических функций; мы не знаем, ни чему равен $\sin(x + \Delta x)$, ни как преобразовать разность синусов.

Разъяснение целесообразности изучения отдельных вопросов курса неминуемо приводит к выявлению связей его различных разделов и тем самым способствует сознательности и прочности знаний. Действительно, выявление связей в преподавании проявляется либо в пропедевтике, либо в повторении. При этом пропедевтика и повторение выступают не только как самоцель, как средство подготовить понимание нового или закрепить знания: они способствуют решению одной из важнейших задач обучения математике — показать ее внутреннее единство как науки, общность, силу и границы применения ее методов.

В старших классах у школьников появляется желание и одновременно способность представить себе изучаемый предмет в целом. То, что в преподавании очень часто не учитывают этих возможностей, выражается, в частности, в том, что старшеклассникам по-прежнему дают теоретический материал небольшими порциями — изучение теории какого-либо вопроса растягивается на неделю, а то и больше, перемежается отвлекающими упражнениями; если надо вывести две-три формулы, то их распределяют по одной на урок: учащихся, как птенчиков, кормят маленькими порциями знания. В результате такое «кусочное» восприятие материала приводит к дефекту, на который неоднократно обращали внимание те, кому приходилось иметь дело с выпускниками: школьники не приучены воспринимать информацию большими кусками.

Научить воспринимать информацию большими порциями нельзя без специальной подготовки, например просто перейдя на изложение нового материала лекционным способом. Такая попытка заранее обречена на провал. Школьник только тогда окажется подготовленным к такому способу получения знаний, когда его систематически будут приучать организовывать информацию, учить находить и показывать связи различных разделов курса, воспринимать его как некоторую целостную систему.

С самых первых уроков курса алгебры и начал анализа следует использовать возможность выявить единство и сущность математического метода познания действительности. (Подробно об этом говорится в статье о воспитании мировоззрения, с. 29.)

Разъяснение этого поможет снять неприязненное отношение к абстрактности, формальности таких, например, разделов курса, как действительные числа или предел последовательности. Математика, которую мы изучаем в школе, в частности начала математического анализа,— это не абстрактная математическая теория, а так сказать, математика реальной действительности, как и геометрия, которая тоже рассматривается в школе, как геометрия реального физического мира. А это значит, что все теоретические положения, и в частности все аксиомы, «навязаны» свойствами этой действительности, прошедшими сквозь призму логического, теоретического исследования. Так, действительные числа возникают как аппарат, инструмент для решения практических задач, в частности задачи измерения. Далее они развиваются внутри теории, исследуются средствами математики и в результате организуются в стройную систему, где, в частности, необходимы и иррациональные числа.

Постепенно учащихся следует подводить к пониманию того, что в математических исследованиях закономерно идти к истине «с двух сторон»: например, догадаться, что должны быть числа, не выражающиеся обыкновенной дробью, потом придумать, какие они могут быть, потом исследовать их теоретически и посмотреть, получили ли мы то, что хотели. Равно как в геометрии, где все почти теоремы, например теоремы о взаимном расположении прямых и плоскостей, могут быть вначале «усмотрены» из реальных прообразов математических понятий.

Увидеть аналогичным образом свойства понятий математического анализа немного труднее, так как числа не поддаются непосредственно чувственному восприятию. Но в курсе алгебры и начал анализа учащиеся знакомятся с прекрасной моделью, идеально отражающей многие свойства множества действительных чисел,— координатной прямой, на которой эти свойства непосредственно можно усмотреть. Координатная плоскость дает возможность непосредственно наблюдать многие факты и теоремы математического анализа, свойства числовых функций. Поэтому очень важно, чтобы на первых же уроках учащимся стала ясна аналогичность структур множества действительных чисел и множества точек координатной прямой.

5. О роли интуиции

Разъяснение связи математических понятий с действительностью очень важно в методическом плане, так как служит основанием использования интуиции, без чего невозможно преподавание начал анализа в школе. Трудно себе представить, что можно разъяснить учащимся связь знака производной с характером монотонности, не опираясь на графические представления, или заставить их выучить теорему Ферма, не показав ее смысл на рисунке.

Обращение к наглядности, графикам и через них к интуиции совершенно необходимо на всех этапах изучения этого курса. Это связано еще и с тем, что для части учащихся моментом, развивающим активность и интерес, является «деятельность» в узком смысле этого слова, оперирование с предметами. Про таких учащихся говорят, что они «понимают руками». Такие учащиеся, например, охотно делают модели к курсу стереометрии, всякие таблицы, чинят приборы в физическом кабинете и т. д. В курсе анализа эта любовь к материальной деятельности проявляется обычно тогда, когда начинают строить графики с применением производной; в этот момент ученики-«деятели» часто вздыхают с облегчением: кончилась теория, кончились «разговоры», можно заняться делом.

Развивать интуицию, практическую сметку не менее важно, чем оттачивать логику. При этом важно, чтобы учащиеся понимали роль этих двух сторон мышления: многие факты, теоремы можно «увидеть»; дойти до них теоретическими рассуждениями часто труднее. Но математическая строгость требует, чтобы каждая догадка, каждое наглядно совершенно бесспорное предложение было проверено логическими рассуждениями, т. е. доказано. Те учащиеся, которые не понимают этого общего принципа, иногда почти физически страдают, когда вдруг, например, начинают исследовать с помощью производной давным-давно набивший оскомину квадратный трехчлен или выявлять промежутки монотонности для синуса опять-таки с помощью производной. В таких случаях совершенно необходимо объяснять роль этого теоретического исследования как проверки нашей интуиции. Например, разбор графика квадратичной функции с помощью производной является примером, на котором мы убеждаемся, что два способа рассуждения приводят к одному результату. Производная же синуса нам нужна, конечно, не для построения графика этой функции — он нам хорошо известен,— а для решения более сложных задач. Например, даже построив график функции $\sin x + \frac{x}{2}$*, определить характер монотонности для нее без производной уже трудно. Когда же мы определяем промежутки монотонности для синуса с помощью производной, то это делается главным образом для того, чтобы убедиться в совпадении результата, полученного «по соображению», с теоретическим.

Школьники встречаются и с другим использованием наглядности, с несколько иным по форме и по существу применением интуитивных соображений. Поясним это на примере. Решая неравенство $2^x > 4$, ученик говорит: «...функция $f(x) = 2^x$ возрастающая, так как график идет вверх». Может показаться, что ученик дает неправильное обоснование, так как факт возрастания функции следует не из вида графика, а из определения функции. На деле же здесь учащийся обращается к графику не для того, чтобы обосновать возрастание, а для того, чтобы вспомнить, какой является функция. В некотором смысле график служит своеобразной шпаргалкой. (Можно сравнить эту ситуацию с тем, как ученик будет решать вопрос о четности или нечетности функции $f(x) = x^6$ или функции синус. Довольно очевидно, что в первом случае он

* Например, «сложением» графиков.

будет апеллировать к определению, так как им легко воспользоваться, а в случае с синусом, вероятнее всего, вспомнит вид графика.)

Для того чтобы вспомнить нужный факт, известный из других источников, часто используются конкретные, частные примеры. Такой прием используется при различении знака в формулах приведения. Для того чтобы определить, какой знак надо ставить: плюс или минус, мы подставляем в формулу острый угол. Логика *при этом такая: мы* знаем, что верна для всех углов одна из формул (либо с плюсом, либо с минусом); если знак функции, стоящей в правой части формулы, для $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ отрицательный, то в левой части, где оказывается функция от острого угла, должен стоять минус, потому что значения всех тригонометрических функций от острых углов положительны. Таким образом, проверка на частном примере дает возможность делать общее заключение только потому, что мы знаем наверняка, что одна из формул верна и притом для всех значений переменного.

Аналогичная логика применяется при решении неравенств «методом интервалов», когда для определения знака на каждом из интервалов знакопостоянства (в школе это, как правило, промежутки непрерывности) достаточно подставить только одно значение аргумента. Обоснование в этом случае выглядит так: так как на всем промежутке функция имеет постоянный знак, а в точке x_0 ее значение положительно, то, значит, на этом промежутке функция положительна.

Разумеется, в процессе работы нет необходимости требовать от учащихся всегда такого полного словесного обоснования; важно только время от времени убеждаться, что учащиеся не забыли, что на самом деле силу довода, обоснования имеет не частный пример, не вид графика, а полученные ранее строгие выводы и факты.

Таким образом, у учащихся должно постепенно возникать понимание того, что наглядные интуитивные соображения очень важны, но только логическое обоснование дает уверенность в их достоверности.

6. Организующая роль повторения

Воспитание привычки к обоснованию начинается с простейшего: применения общего положения к частному случаю, ссылок на теорему, формулу и т. п. Как правило, при обучении от учащихся требуют таких ссылок непосредственно после получения соответствующего общего положения, при упражнениях на закрепление. В этой ситуации учащемуся нет необходимости подыскивать обоснование, оно почти очевидно.

Поэтому в обучении должен быть и следующий этап, в котором учащемуся не должно быть с самого начала ясно, что именно является основанием для вывода; он должен перебрать несколько и выбрать нужное. Для того чтобы это происходило попроще, полегче для ученика, обычно рекомендуется заранее повторить те сведения, которые понадобятся, причем делается это в неприкрытой форме: «К следующему вопросу нам понадобятся формулы (такие-то), повторите их». И далее при изложении нового учитель прямо ссылается на повторенные сведения. Материал воспринимается свободно, и даже слишком: активной работы мысли учащихся не происходит и, может быть, поэтому в ряде случаев не происходит и настоящего усвоения.

Между тем, создавая повторением условия для восприятия нового, можно не «вести учащихся за ручку», а обеспечивать повторение, так сказать, «в скрытом виде». Например, если нужно повторить формулу сокращенного умножения, можно дать пример, где она применяется. Так, для вывода формул производных тригонометрических и показательной функций нужно знать прежде всего определение производной и некоторые формулы тождественных преобразований (для синуса — преобразование разности синусов в произведение, для показательной — вынесение за скобки и деление степеней с одинаковыми основаниями). Чтобы подготовить учащихся к восприятию этого материала, можно поступить по-разному. Первый способ — это задать прямо: повторить то-то и то-то. Второй — дать вопросы, связанные с необходимым теоретическим материалом, например: представить в виде произведения $\sin 3x - \sin 5x$; пользуясь определением производной, доказать, что $(x^2)'$ в точке $x = 3$ равна 6 и т. п. Другой пример: сведения, нужные для решения простейших тригонометрических уравнений, повторяются обычно в связи с непосредственно предшествующим материалом. Специально требуется вспомнить только значения функций, основных углов и построение угла по данной функции. Задание, на котором учащиеся вспомнят это, может быть, например, таким: «Постройте угол α, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$; если $\cos \alpha = \frac{2}{5}$» и т. д.

На первый взгляд кажется несущественным то, что необходимые для нового материала теоретические сведения повторяются в «неявном виде». Однако при этом учащиеся ставятся в условия, когда они сами должны подбирать нужный материал, и в то же время такое подыскание им посильно, потому что они в другой форме, в связи с другим заданием его вспоминали.

В результате при объяснении нового учащиеся будут вынуждены работать более активно, причем найдется дело для учащихся разной подготовки и развития: одни скажут, что надо применить определение, другие сформулируют это определение, третьих можно проверить, как они понимают это определение на том примере, который был задан, четвертые попробуют применить его к случаю новой функции и т. д.

Таким образом учащиеся будут приучаться самостоятельно подбирать из арсенала памяти сведения, нужные для восприятия нового или обоснования какого-либо положения.

7. Дифференцированный подход к учащимся

В старших классах школы вообще и при изучении курса алгебры и начал анализа в частности повышается необходимость дифференцированного подхода к учащимся. Дифференцированный и в отношении требований к знаниям, и в отношении ставящихся перед учащимися в процессе обучения задач подход является непременным условием доступности для учащихся этого курса и эффективности обучения.

В самом деле, и уровень развития и направленность интересов, и запас математических знаний учащихся ко времени перехода к изучению этого курса достигают такого разброса, что нивелирование обучения приведет неизбежно либо к недоступности материала для части учащихся, либо к торможению развития другой их части. *Дифференцированный подход совершенно необходим для* того, чтобы перед каждым учащимся всегда стояла, кроме общей цели, конкретная, доступная, но «зовущая вперед».

Интерес к обучению одинаково гасится и при слишком легких и потому скучных задачах, и тогда, когда с самого начала ученику ставится непосильная задача или ему кажется, что она непосильна.

Все это делает необходимым дифференцировать материал по степени его значимости, по характеру усвоения, а значит, и изложения. Недаром в методических письмах нередко встречаются не очень ясные слова: «Материал изучается в ознакомительном плане».

Такой подход нашел свое отражение и в тексте программы. Действительно, в разделе «Требования к учащимся» уже проведен некоторый отбор материала, которым учащиеся должны владеть активно: от учащихся не требуется умение проводить некоторые доказательства, знание ряда формальных определений и т. п.

Однако выделение и четкая формулировка общих требований к учащимся не снимает полностью задачи выделения основы, костяка курса. Действительно, по смыслу «требований» ученик, удовлетворяющий всем этим требованиям, заслуживает оценки «5». А за что ставить «3»?

В практике к оценке знаний учащихся подходят часто исходя из «количественных» показателей: ответил на все пять вопросов — «5», не ответил на один из пяти — «4», на два не ответил — «3» и т. д. В результате удовлетворительная оценка — «3» — ставится по существу, не за знания, а за незнание чего-либо. Что знает ученик, имеющий «3», зачастую неясно учителю. Между тем достаточно ясно, что есть вопросы, задачи, на которые должны отвечать все усвоившие соответствующий раздел. Например, если ученик не умеет применить признак возрастания функции на промежутке, не может решить вопрос о возрастании конкретной функции, то ни при каких условиях (например, даже если он знает формулировку признака) знания учащегося по этому разделу не могут считаться удовлетворительными. Другой пример: если ученик не знает, как проверить, является ли некоторая функция первообразной для данной функции, то можно твердо сказать, что все остальные его знания по этому разделу механические, формальные и потому неудовлетворительные.

В результате возникает ситуация, когда постепенно у значительной части учащихся накапливаются «тройки», означающие, по сути дела, наличие существенных пробелов в знаниях, и вскоре изучение курса для этих учащихся становится непосильным.

Чтобы избежать возникновения такой ситуации, необходимо из всего учебного материала выделить костяк курса, минимум, необходимый для того, чтобы знания учащегося по данному разделу могли считаться удовлетворительными, и затем неукоснительно добиваться, чтобы весь материал, необходимый для восприятия дальнейшего, был усвоен всеми учащимися.

Может показаться, что такой подход означает слишком сильное повышение требований к учащимся. Однако на самом деле выделение обязательного минимума и требование в первую очередь его усвоения делает требования более посильными, а обучение — более систематичным и целенаправленным.

Важным условием эффективности такого подхода к оценке знаний является информированность учащихся о содержании этого минимума. Дело в том, что учитель сознательно или бессознательно для себя такой минимум обычно выделяет, но далеко не всегда сообщает об этом учащимся. Как часто слабый ученик, желающий исправить «2» по какому-либо разделу, слышит от учителя: «Хорошо, спрошу, учи все». Выучить все слабому ученику, да еще не очень хорошо представляя, что значит «все»,— задача явно непосильная. Все усвоить он может только в результате длительной работы, да еще направляемой и поддерживаемой учителем. А так он не знает, с чего начать; откроет учебник, прочтет вводные фразы — это надо учить? Самостоятельно он не может отделить главное от второстепенных деталей и, пытаясь запомнить все, терпит привычную неудачу.

Выделение главного, основы изучаемого материала можно проводить при постановке задачи: «Сегодня мы должны выяснить геометрический смысл производной и научиться писать уравнение касательной. Это и будет заданием по теории». Иногда это можно сделать при подведении итогов урока: «Итак, мы разобрали несколько примеров решения иррациональных уравнений. Каждый должен уметь «избавляться от иррациональности» и знать, что если используется возведение в квадрат обеих частей уравнения, то проверять корни обязательно». При этом ученикам должно быть ясно, что слова «каждый должен...» означают, что тот, кто выполнит должное, уже не может получить «2», но тот, кто не выполнит, не может рассчитывать на «3».

Приведем несколько примеров выделения «минимума» для оценки «3».

По теме «Первообразная» (первые уроки). Уметь определить первообразную в конкретной форме, т. е. уметь доказать, что данная функция является первообразной для другой. Знать таблицу первообразных (с проверкой), знать запись множества всех первообразных через одну.

По теме «Свойства и графики функций синус и косинус». Уметь по вопросам определить, обладает или нет данная функция данным свойством (например, является ли возрастающей на интервале $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$), привести обоснование.

Очень важным моментом правильной ориентации учащихся в работе над материалом является заключительный этап урока — оглашение домашнего задания, когда учитель разъясняет, что именно будет в следующий раз спрашивать по разобранному в классе вопросу. Например, после вывода формул синуса и косинуса суммы и разности задание можно дать примерно так: «Обязательно для всех знать формулы, причем уметь читать их и слева направо, и справа налево (т. е. знать, что выражение $\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$ есть синус разности и т. п.). Уметь записать эти выражения для конкретных значений углов α и β». Вряд ли такое задание непосильно или приводит к перегрузке. Если же задать на дом «все», т. е. и доказательство формулы, которое довольно сложно, то задание почти наверняка окажется для многих непосильным. В то же время следует стимулировать сильную часть класса на работу по усвоению доказательства: «Кто сможет доказать формулу — получит «5»», причем опрашиваются «добровольцы». Чтобы приучить учащихся вызываться добровольно отвечать, нужно поставить непременным правилом, что за ответ такой ученик не должен получать оценку, более низкую, чем ту, на которую он рассчитывает. Можно отметить: «За ответ, в котором были (такие-то) недочеты, можно поставить не более «4»». Но если ученику это неприятно, то не следует ставить оценку в журнал.

Но главное все-таки забота о том, чтобы не терялась основа, без которой продвижение вперед будет зданием, построенным на песке. Ведь нам приходится все время считаться с тем, что в школьном курсе математики нельзя изучать последующее, не владея определенным багажом из предыдущего. Вот этот багаж, без которого нельзя двигаться вперед (невозможно усвоение нового, решение основных задач), и образует прежде всего обязательный для удовлетворительной оценки минимум.

Встает вопрос, следует ли относить к этому минимуму знание определений. Ответ на этот вопрос не однозначен. Действительно, знание определения некоторого понятия совершенно необходимо, когда является непосредственной основой для получения других фактов. Например, учащийся, знающий определение синуса числа и понимающий, что такое функция синус, может не заучивать, не запоминать многие (почти все) свойства этой функции, может почти все сообразить, исходя из этого определения. Отсюда следует, что знание определения синуса (и лучше в «алгоритмическом виде»: чтобы найти синус числа α, нужно сделать то-то и то-то) обязательно для всех, по крайней мере при первоначальном знакомстве с этой функцией.

Но возьмем, например, определение производной. Несомненно, на некоторых этапах обучения, например, при выводе формул и правил дифференцирования, оно совершенно необходимо для понимания материала. Однако нередко учителя увлекаются «отработкой» этого определения, заставляя учеников находить производные в точке «по определению» даже тогда, когда все правила и формулы дифференцирования уже получены и ученики знают таблицу производных. Это кажется не вполне целесообразным: для того ведь и выводятся правила и формулы, чтобы пользоваться ими, а не определением. А для формирования понятия производной понимание механического смысла производной как мгновенной скорости и ее геометрического истолкования как углового коэффициента касательной к графику важнее, пожалуй, умения сформулировать определение.

Заметим, что иногда учитель считает, что ученику легче усвоить смысл производной, если он запомнит определение. Однако это может быть и не так: конкретно мыслящие ученики, склонные к образному восприятию, наоборот, лучше усвоят определение, если будут знать смысл понятия. Действительно, схемы рассуждений, связывающие определение производной с ее смыслом, как скорости изменения функции, могут быть разные: производная — это предел отношения ... и т. д.,— значит, это мгновенная скорость; или наоборот: производная — это мгновенная скорость,— значит, это предел отношения и т. д.

По поводу определения синуса хочется сделать еще одно замечание. Дело в том, что по мере изучения функции синус представление о ней довольно стойко связывается с видом графика этой функции. Происходит как бы подмена определения: ученик уже не помнит, что такое синус числа, а считает, что функция синус — это функция, график которой имеет определенный, знакомый ему вид. Иметь в виду это обстоятельство важно для учителя, в частности, тогда, когда разъясняется решение тригонометрических неравенств: выбор способа решения (разъяснять ли этот материал с помощью графика или на единичной окружности) зависит от того, как данный ученик представляет себе синус.

Все изложенные примеры и соображения приводят к выводу, что заучивание определений не является самоцелью и должно включаться в обязательный минимум только тогда, когда знание определения является опорным для дальнейшего.

Другим видом материала, требующего запоминания, являются правила и формулы. Их в курсе не очень много. Основная тяжесть запоминания падает на тригонометрию. Учащимся, как правило, кажется, что этих формул очень много. Но такое впечатление возникает только потому, что учащиеся заучивают их «сплошь», подряд, не делая попытки как-то их организовать, установить связи, найти аналогии. Между тем само по себе запоминание тригонометрических формул, если его не использовать для обучения организовывать информацию, наполовину теряет ценность. Действительно, практическое значение знания формул невелико; более ценным является умение пользоваться справочниками, таблицами; для тренировки памяти лучше использовать другой материал (например, иностранный язык), да и то на более ранних стадиях обучения. Математические же правила и формулы тем и ценны, что на них можно поучить школьников запоминать организованный (или, лучше, организующийся) материал. Образцом в этом отношении являются формулы приведения, объединенные в единое целое мнемоническим правилом. Следует, однако, заметить, что название «мнемоническое» здесь применяется не совсем точно; мнемоническим правило называют тогда, когда оно не связано, по существу, с запоминаемым материалом. Например, чтобы запомнить значения синусов основных углов, выписывают табличку.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Как видим, здесь совершенно случайно под знаками корня стоят последовательные целые числа, начиная с нуля. Что же касается «мнемонического» правила для формул приведения, то оно вытекает из смысла формул и на самом деле может быть строго доказано. Многие учителя объясняют учащимся, почему «при вертикальном диаметре» меняется название функции и в чем смысл правила определения знака в правой части.

Остальные же формулы тригонометрии обычно заучивают, не группируя их, не выявляя связей и не показывая закономерностей. Между тем, если отметить некоторые характерные признаки в формулах (например в группе формул «синус и косинус суммы и разности» и «сумма и разность синусов и косинусов»), это поможет учащимся их запомнить и различить. Например, в формулах для синуса встречаются только произведения разноименных функций, в формулах для косинуса — произведения одноименных функций, а это связано с тем, что синус — нечетная функция; соответственно косинус — четная функция. В формуле для синуса знаки «совпадают»: синус суммы равен сумме, синус разности — разности, сумма синусов равна синусу полусуммы, умноженному на косинус полуразности; у косинуса знаки надо брать «наоборот»: косинус суммы равен разности, косинус разности — сумме. Это тоже не случайно: синус в первой четверти, где все функции положительны,— возрастающая функция. Поэтому в формуле для синуса суммы не могло быть минуса; иначе для случая, когда и α, и β, и $\alpha+\beta$ лежат в первой четверти, большему углу $\alpha+\beta$ соответствовал бы меньший синус. А косинус в первой четверти убывает, соответственно и в формуле для косинуса суммы стоит минус.

Все эти пояснения, конечно, не являются строгими, поэтому надо проследить, чтобы учащиеся не восприняли их как доказательства. Более того, не следует требовать, чтобы ученики могли дать такие пояснения при опросе: все эти пояснения нужно рассматривать только как средства облегчения запоминания и ни в коем случае не как предмет изучения. Надо иметь в виду также, что не для всех учащихся такой разбор облегчает запоминание (так же как для некоторых полезно знать словесную формулировку выражения формулы: «Синус суммы двух углов равен синусу первого угла...», а для других ее заучивание является лишь дополнительной нагрузкой).

Запоминание формул — будь то формулы тригонометрических тождеств или таблица производных — процесс длительный, и нечего рассчитывать, что все учащиеся запомнят формулы сразу, в один этап. Вот, например, как проходило разучивание формул сложения в одном из классов. На первом этапе, сразу после получения этих формул, в классе висела таблица, в которую не возбранялось подсматривать (однако таблица висела на боковой стене, так что отвечающий с места ученик должен бы был повернуть голову или, по крайней мере, скосить глаза). Однако вопросы задавались «непрямые»: «Чему равен $\sin(5x+3x)$?» или «Что́ за формула: $\cos a\cdot\sin b-\cos b\cdot\sin a$?» и т. п. На следующем этапе происходило «доучивание» в форме двух-трехминутной разминки в начале урока, когда формулы спрашивались впрямую: «Чему равен косинус суммы? Синус разности?» и т. п., причем таблица была снята. (Интересно отметить, что учащиеся, вспоминая формулу, по-прежнему скашивали глаза на то место, где висела таблица.) При этом времени на раздумье уже не давалось. Окончательная отработка формул проходила в процессе решения задач, когда в некотором заданном выражении нужно было найти, увидеть знакомую формулу.

При проверке знания формул и правил нужно отличать умение применять правило от умения дать его формулировку, отдавая предпочтение первому. Например, дать формулировку правилу дифференцирования сложной функции и даже записать его символически довольно трудно. Между тем добиваться этого умения от учащихся совершенно ни к чему: главное здесь — практическое умение найти производную композиции двух функций, а выработать такое умение только по формулировке правила (общей), без конкретных примеров трудно, почти невозможно.

Таким образом, к отбору материала для запоминания следует подходить осторожно: требовать заучивания правил, формул только в тех случаях, когда это в каком-либо отношении полезно, например развивает учащихся, как в случае «организации» тригонометрических формул, или когда правило (формула) служит «опорным пунктом» для усвоения некоторой системы фактов, как в случае определения синуса.

8. Об организации опроса

В старших классах, как мы уже отмечали, должны меняться общие требования к учащимся. Это в полной мере касается такого момента учебного процесса, как опрос учащихся вообще. Этому посвящена специальная статья настоящего сборника. Мы коснемся здесь только одной стороны дела, существенной для обучения курсу начал анализа.

В последнее время все чаще слышатся жалобы на то, что школьники не умеют связно, полно и обоснованно отвечать на поставленный вопрос, что класс не слушает ответ своего товарища и т. д. Следствием этого (а может быть, причиной?) является то, что учителю часто «жаль тратить время» на уроке на опрос, при котором от ученика действительно требовался бы такой связный ответ, так как для контроля, считает учитель, достаточно письменных работ и ответов на отдельные конкретные вопросы.

Между тем тот факт, который обычно служит для учителей оправданием такого положения, а именно отсутствие в школе устного экзамена по курсу алгебры и начал анализа не может являться оправданием, так как умение излагать свои мысли никто не исключал из задач обучения. Нельзя не принимать в расчет и то обстоятельство, что отсутствие такого умения у сильных учащихся довольно часто ставит их в невыгодное положение на экзаменах в вузах. «Знаю, но не умею объяснить» — такой уровень владения материалом не может считаться удовлетворительным для человека со средним образованием.

Изменив немного традиционные формы опроса, можно без дополнительных затрат времени получить довольно значительный эффект. Вот, например, как опрашивался класс по теме «Первообразная». Были заданы вопросы: «Что такое первообразная?», «Приведите пример первообразной некоторой функции», «Является ли функция x^2 первообразной для функции $2x$?», «Почему?»*, «Есть ли у функции $f(x) = 2x$ еще первообразные?», «Сформулируйте основное свойство первообразных». Эти вопросы задавались всему классу, ученики отвечали с места. Вроде бы все хорошо, класс активен. Учитель комментировал ответы, ошибочные ответы исправлялись. Однако сразу бросается в глаза, что учеников

---

* Пользуемся случаем отметить неудачную, но, к сожалению, традиционную формулировку вопроса: «Почему?» Как почему? Такие это функции, другой причины нет. На самом деле учитель должен задать вопрос: «Как доказать, что это первообразная?» или «Почему ты так считаешь?»

здесь «вели за ручку»: по сути дела, учитель сам составил план ответа, этого плана ученикам даже не сообщил. Ученикам приходилось думать только над ответом на уже поставленный вопрос, внимание их раздробилось, цельность восприятия снизилась; установление связей, логики изложения не только не было предметом активной работы мысли учащихся, но и свободно могло ускользнуть даже от пассивного восприятия.

Легко показать на этом примере, что несложная модификация организации опроса в этом случае могла, не увеличивая значительно затрат времени, дать значительно больше для воспитания учащихся. Учитель мог предложить учащимся, во-первых, составить план ответа по теме «Первообразная», во-вторых, придумать вопросы по плану и уже потом устроить «перекрестный опрос» по этим вопросам.

Конечно, такую работу нецелесообразно проводить на каждом уроке. Это прежде всего связано с характером материала. Связный полный рассказ ученика важен, когда подводятся итоги изучения какого-либо вопроса, обзор некоторого куска курса. Например, если проверяется усвоение доказательства теоремы сложения, то отвлекаться на структуру ответа не стоит, так как сам вопрос и без того сложен, а структура изложения здесь достаточно проста. Если же вопрос ставится так: «Формулы сложения для тригонометрических функций», то здесь можно уже обсудить план ответа, который должен включать в себя и постановку задачи, и перечисление средств доказательства, и возможно, в этом плане само доказательство будет уже одним из пунктов.

Приведем несколько вопросов курса алгебры и начал анализа, на которых можно учить школьников связному изложению материала.

Действительные числа. (Примерный план: откуда берутся числа; свойства множества рациональных чисел; задачи, приводящие к введению иррациональных чисел; запись чисел бесконечной десятичной дробью; понятие об операциях с числами, заданными бесконечными десятичными дробями; сохранение для действительных чисел свойств множества рациональных чисел, новые свойства.)

Числовая прямая. (Примерный план: координатная прямая; изображение иррациональных чисел; точки, для которых нет рациональной координаты; расхождение с аксиомой расстояния; отыскание координаты в виде бесконечной десятичной дроби; взаимно-однозначное соответствие между точками координатной прямой и действительными числами, сохранение отношений порядка и «между»; числовая прямая; числовые промежутки; окрестность.)

Непрерывность функции в точке. (Примерный план: наглядное представление о непрерывности; примеры непрерывных в x_0 функций; функций, не являющихся непрерывными в x_0; равенство $f(x) \approx f(x_0)$ при $x \approx x_0$ — характеристическое свойство непрерывной в x_0 функции; определение непрерывной в x_0 функции.)

Интеграл. (Примерный план: определение интеграла; независимость интеграла от выбора первообразной; определение криволинейной трапеции; производная площади криволинейной трапеции; геометрический смысл интеграла.)

Решение уравнения $\cos x = a$. (Примерный план: функция косинус, ее множество значений, периодичность, четность — формулировки; условия наличия решений уравнения $\cos x = a$; наименьшее положительное решение и его обозначение как значения арккосинуса; наименьшее по модулю отрицательное решение — симметричное; множество решений уравнения.)

При обучении составлению плана учителю вначале придется сообщить учащимся некоторые «правила», например: начинать ответ следует с определения или формулировки теоремы; надо быть готовым сформулировать теоремы или определения, на которые придется ссылаться при рассказе и т. п. Последнее требование нацелит учащихся на то, что каждое утверждение должно быть обосновано и будет способствовать превращению их ответов из рассказа-повествования в четкий, сжатый и содержательный ответ. При этом не обязательно, чтобы ученик произносил вслух все формулировки, но когда он готов к тому, что его могут в любой момент их спросить, то это обязательно скажется положительно на четкости и полноте ответа. Отвечая, например, на вопрос о свойствах функции синус (или косинус), школьники просто перечисляют эти свойства, не делая даже попытки дать какие-либо пояснения. Это, в частности, указывает на неумение работать с учебником. Действительно, в учебном пособии «территориально» разъединены перечисление свойств и их обоснование, которое разбросано по соответствующему «пункту» пособия. Можно спорить о том, насколько целесообразна такая структура изложения в учебнике, но уж если так сделано, то это можно и нужно использовать, чтобы научить учащихся подыскивать нужный для обоснования материал в сравнительно небольшом по объему тексте.

Одним из приемов обучения учащихся связному изложению материала, составлению планов ответа являются практикуемые многими учителями ответы по конспекту.

Так, разъясняя вопрос о логарифмической функции, учитель предложил законспектировать его рассказ. При этом речь по существу шла не о конспектировании, а о составлении плана, выделении основных моментов, записи примеров. Учащиеся выполняли записи по указаниям учителя. Получился такой конспект:

1. Логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ — обратная показательной $g(x) = a^x$. (Определение обратной функции см. в п. 84.)

2. Основное логарифмическое тождество (следует из определения)

$$a^{\log_a x} = x.$$

З а д а ч а: представить число $a > 0$ как степень любого другого числа $b > 0$. Например:

$$2 = 5^{\log_5 2};\ 0{,}1 = \sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} 0{,}1} \text{ и т. д.}$$

3. График логарифмической функции $y = \log_a x$ симметричен графику $y = a^x$ относительно прямой $y = x$.

Построить графики $y = 2^x$, $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

4. Свойства логарифмической функции получаются из соответствующих свойств показательной. (Ссылаться на теоремы п. 84.) Например, так как $y = 2^x$ возрастает на $]-\infty; \infty[$, то $y = \log_2 x$ возрастает на всей области определения, т. е. на $]0; \infty[$.

На следующем уроке учащиеся опрашивались по конспекту.

Подобный прием может быть использован и при работе с учебником (см. статью Ф. М. Барчуновой).

При составлении плана по учебнику учитель получает возможность проверить подготовленность нескольких учащихся: просмотреть тетради, предложить зачитать план, дополнить его. Учащиеся должны приучаться к тому, что самостоятельное составление плана оценивается в ряде случаев так же высоко, как самый ответ, иногда даже выше. Сильного ученика обычно вообще нет необходимости опрашивать по плану. Поэтому в ряде случаев, проверив план у сильного учащегося (иногда у двух-трех), можно задать ему вопросы не по плану, а более сложные и интересные, например: «Как получить из графика $y = 2^x$ график $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (двумя симметриями)?», «Доказать, что график $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ конгруэнтен графику $y = \log_3 x$» и т. п. По зачитанному каким-либо учеником плану можно опросить других учащихся. В частности, тех, кто послабее, следует спросить по отдельным, наиболее важным пунктам плана, входящим в обязательный минимум.

Таким образом, выделение главного в изучаемом материале, «структурирование» курса при некоторой подготовленности класса может проходить с активным участием самих учащихся.

Е. Г. Глаголева,
И. Л. Никольская

ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕРИАЛИСТИЧЕСКОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ НА УРОКАХ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

В условиях перехода ко всеобщему среднему образованию, когда основная масса оканчивающих среднюю школу идет непосредственно в жизнь, на производство, становится особенно актуальной задача, сформулированная в Постановлении ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О дальнейшем совершенствовании обучения, воспитания учащихся общеобразовательных школ и подготовки их к труду»: «Добиваться, чтобы полученные в школе знания стали прочной основой марксистско-ленинского мировоззрения молодежи». В эпоху научно-технического прогресса, одной из характерных черт которого является интенсивное проникновение математических идей и методов во все отрасли науки, техники, производства, молодежь должна выйти в жизнь не только со знанием основ математики, но и с пониманием ее роли и места в системе наук и соотношения с действительностью.

Современный курс математики представляет для этого большие возможности. Расширение содержания школьного математического образования по сравнению с ранее действовавшими программами, усиление прикладной ориентации курса создают благоприятные условия для работы по воспитанию мировоззрения на уроках математики. Вместе с тем такое обогащение школьного курса неизбежно связано с рассмотрением ряда общих понятий, часто более абстрактных, чем традиционные. Это, естественно, требует специальной заботы о том, чтобы рассматриваемые абстракции не уводили учащихся от действительности и тем самым не внушали бы им извращенное представление о математике как науке.

Воспитание мировоззрения нельзя рассматривать как некоторую дополнительную задачу, не связанную с обучением собственно математике. Работа по воспитанию мировоззрения, особенно в той ее части, где разъясняется, вскрывается связь математики с действительностью, практикой, способствует осмысленному, сознательному усвоению материала. Более того, обучение математике, не сопровождаемое такой работой, порождает один из наиболее трудно изживаемых недостатков в знаниях учащихся — формализм.

Переход к изучению начал анализа с точки зрения формирования мировоззрения является в определенном смысле этапным.

В курсе математического анализа учащиеся вплотную сталкиваются с такими понятиями, как «действительное число», «предел функции», «производная», «интеграл». Показ того, что эти понятия, несмотря на высокую степень абстракции, на самом деле связаны с действительностью, раскрытие характера этих связей, разъяснение разнообразных практических приложений — все это очень важно.

Содержание курса дает возможность проиллюстрировать на математическом материале некоторые категории и законы диалектики, с которыми учащиеся знакомятся на уроках обществоведения. Говоря о мировоззренческом значении обучения математике, А. Я. Хинчин отмечал, что «львиная доля воспитательного эффекта в этом направлении принадлежит... так называемой высшей математике, с которой, по выражению Энгельса, в математику входит диалектика»*.

Школьный курс математического анализа может сыграть важную роль в деле воспитания диалектико-материалистического мировоззрения еще и потому, что к IX классу знания, развитие и жизненный опыт учащихся достигают такого уровня, на котором для достаточно серьезного обсуждения мировоззренческих вопросов, с одной стороны, имеется содержательная основа, а с другой — такое обсуждение доступно учащимся и представляет для них интерес.

В этом возрасте усиливается, становится более явной и определенной дифференциация учащихся по интересам. Обсуждение при изучении математики мировоззренческих вопросов привлечет к ней интерес учащихся-«гуманитариев». Что же касается учащихся, интересующихся и увлекающихся математикой, то для них обсуждение этих вопросов будет полезно, в частности, как средство предотвращения «фетишизации» математики, т. е. преувеличения ее роли и возможностей.

В старших классах особенно заметно благоприятное влияние рассмотрения мировоззренческих вопросов на усвоение программного материала. Понятие «производная» было бы трудно ввести и разъяснить учащимся без обращения к его физическому смыслу; многие трудности усвоения понятий «предел последовательности» и особенно «предел функции» можно существенно уменьшить или вовсе снять, уделив должное внимание их геометрическим интерпретациям, и т. д.

Прежде чем приступить к обсуждению конкретных методических вопросов воспитания диалектико-материалистического мировоззрения при изучении начал анализа, изложим некоторые общие положения, относящиеся к преподаванию математики.

---

* Хинчин А. Я. О воспитательном эффекте уроков математики.— В кн.: Математическое просвещение. Вып. 6, 1971, с. 26.

Основой марксистско-ленинского мировоззрения, как целостной системы взглядов и представлений о мире, является материалистическое понимание действительности, т. е. признание первичности материи и вторичности сознания, а также утверждение познаваемости мира. Поэтому «забота преподавателей любой дисциплины должна заключаться в том, чтобы убеждать учащихся на материале, предлагаемом для изучения, и в процессе применения усваиваемых ими знаний, что научные понятия возникают в результате отражения в сознании единого, не зависящего от наших чувств и интеллекта реального мира, предметы и явления которого находятся во взаимосвязи, что единственной основой мира является материя, находящаяся в постоянном движении и развитии, обусловленном действующими в мире внутренними противоречиями, что при всей сложности стоящих перед познанием задач оно движется к абсолютному познанию, оставаясь, однако, относительным на каждом своем этапе»*.

Математика, как и любая наука, в своем возникновении, становлении и развитии проходит через три этапа познания: от живого созерцания к абстрактному мышлению и от него — к практике. Однако на каждом из этих этапов математика имеет особенности, делающие задачу воспитания материалистического мировоззрения в процессе ее школьного преподавания особенно острой и сложной. «Философские вопросы математики (характер и происхождение математической абстракции, ее особенности) всегда являлись ареной борьбы между идеализмом и материализмом»**.

Специфичность отражения математикой действительности и определяет основные направления воспитания материалистического мировоззрения в процессе ее преподавания.

Если при изучении физики, химии, биологии, где каждое теоретическое положение подкрепляется данными эксперимента или историей изучения объективной действительности, у учащихся естественным образом создается представление об этих науках как об отражениях реальности, то с математикой дело обстоит иначе. В отличие от вышеназванных естественных наук (физика, химия, биология) математика не связана с действительностью непосредственно. Ее объектом, по определению Ф. Энгельса, являются «пространственные формы и количественные отношения действительного мира», т. е. абстрагированные от реальности наиболее общие свойства и отношения предметов и явлений. Законам материального мира в математике соответствуют связи абстрактно-логического характера между математическими понятиями, системность мира отражается в таком понятии современной математики, как «математическая структура» и т. д. Поскольку объектами

---

* Маркушевич А. И. Преподавание в школе естественно-математических наук и формирование научного мировоззрения. «МШ», (Здесь и далее эта запись означает: «Математика в школе».) 1976, № 2, с. 14—15.

** «Философский словарь», М., Изд-во политической литературы, 1975, с. 10.

математики являются абстракции, а каждое понятие есть, в свою очередь, результат некоторой абстракции, то математические понятия являются абстракциями от абстракций. Развиваясь, они все более утрачивают видимую связь с действительностью; далеко не для всякого математического понятия можно указать реальный прообраз. Поэтому, если нет достаточного внимания к мировоззренческой стороне дела, есть опасность возникновения неправильного понимания природы математических понятий, соотношения между материальным миром и представлением человека об этом мире. В связи с этим особую важность приобретает систематическая целенаправленная *работа по раскрытию перед учащимися связей математики с действительностью*, зачастую непрямых и неочевидных. Как указывал А. Я. Хинчин, «перед учителем математики стоит нелегкая задача — преодолеть в сознании учащихся возникающие со стихийной неизбежностью представления о сухости, формальном характере, оторванности этой науки от жизни и практики».

Раскрытие материального происхождения математических понятий, являясь первой задачей учителя, не должно заслонять тот факт, что стадия абстрактного мышления является для математики такой же неотъемлемой, как и связь ее с действительностью. Именно высокая степень абстрактности математических понятий, логическая разработанность математических теорий и составляют силу математики, делают ее мощным инструментом познания, обеспечивают широкую ее применимость. Следует иметь в виду, что, наряду с отрицанием материального происхождения математических абстракций, непонимание роли абстрактного мышления служит источником идеалистического толкования математических теорий. При примитивном понимании сущности отражения математикой действительности можно считать, например, что изучение в математике четырехмерного пространства является проявлением идеализма («реальное пространство трехмерно, а четырехмерного нет и не может быть»), или обвинить математику в агностицизме на том основании, что в ней есть неразрешимые задачи (например, квадратура круга, удвоение куба, трисекция угла, доказательство пятого постулата Евклида и пр.), или требовать отказаться в школе от рассмотрения простейших теоретико-множественных понятий, так как «в теории множеств есть противоречия», и т. д.

Поэтому работу по выяснению связи математики с действительностью необходимо соединить с *разъяснением роли абстракции и логики* во всякой науке, и в математике в особенности. Тогда ступень абстрактного мышления, т. е. формализации логического исследования, будет пониматься учащимися правильно, в соответствии с истинным положением дела, как необходимое звено в научном познании действительности.

Во избежание неправильных представлений об исключительности роли абстракции в математике следует разъяснить учащимся, что абстрактность понятий не является отличительной чертой математики. Понятия любой науки являются абстракциями некоторых явлений реального мира (например, понятие скорости в физике, класса в истории и т. д.). Именно их применение делает человеческие знания глубже, вернее и действеннее, позволяя перейти от эмпиризма к науке.

Большое значение для воспитания мировоззрения школьников имеет *раскрытие роли практики* в развитии математики, равно как и показ ее практического, прикладного значения.

При этом следует остерегаться упрощенного, примитивного толкования практики как этапа познания, а также объяснить школьникам, что нужно отличать практическое значение от утилитарного, прикладное значение от прагматического. Надо иметь в виду, что «некоторые математические выводы не могут быть непосредственно проверены, но выводы из этих выводов всегда доступны проверке. Таким образом, критерий практики применяется и в математической науке: само оправдание научной деятельности математики (иногда последующими поколениями) достигается посредством использования этих инструментов в проблемах естествознания, техники, планирования и управления...»*

В этой связи полезно обратить внимание учащихся на то, что и в естественных науках не всегда сразу становится ясным практическое значение тех или иных теоретических результатов. Вспомним, что Резерфорд считал безнадежными попытки найти практическое применение его работам по строению атома, а на опыты Фарадея смотрели как на забаву (на что, впрочем, сам Фарадей отвечал, что нельзя знать заранее, какую пользу принесет новорожденное дитя). Для математики же, в силу указанных ее особенностей, в большинстве случаев связь теоретических результатов с практикой еще более неочевидна, опосредована. Практическое значение могут иметь не сами математические результаты, а результаты других наук, полученные на их основе. Ярким примером этому может служить математическая логика, которая возникла как «чистая теория», а несколько десятилетий спустя нашла широкое применение в различных естественных и гуманитарных науках, а через них — в практике.

При изучении математики, в частности начал анализа, учащиеся встречаются с такими понятиями, которые могут показаться им вовсе не имеющими практического значения. Таково, например, понятие «иррациональное число». В учебнике прямо сказано, что на практике можно было бы обойтись только рациональными числами. В этом и подобных случаях имеется опасность возникновения у учащихся неверного представления, что в математике есть понятия бесполезные, «лишние». Поэтому необходимо разъяснять учащимся, что практическое значение многих математических понятий состоит в том, что они служат звеньями, «кирпичиками» в

---

* Маркушевич А. И. Преподавание в школе естественно-математических наук и формирование научного мировоззрения. «МШ», 1976, № 2, с. 14.

построении теории. Так, понятие «иррациональное число» необходимо для построения теории действительного числа, которая, в свою очередь, является основанием математического анализа; его же понятия и результаты имеют чрезвычайно широкие и разнообразные применения. Математические понятия и результаты сами по себе могут иметь чисто теоретическое значение; однако, по образному и емкому замечанию В. И. Ленина, нет ничего практичнее хорошей теории.

Таким образом, изучение в школе начал анализа, как в силу характера содержания этого курса, так и в силу возрастных особенностей старшеклассников содержит возможности для формирования у учащихся правильного и всестороннего взгляда на соотношение математики с действительностью, ее роль в общественной практике, особенности ее метода. Этими возможностями ни в коем случае не должен пренебрегать учитель. Планомерная, целенаправленная и методически грамотная их реализация будет весомым и ничем другим не восполнимым вкладом в дело воспитания диалектико-материалистического мировоззрения учащихся.

Покажем, как в свете этой задачи может быть использован материал отдельных тем курса.

Основным объектом курса начал анализа, как и математического анализа вообще, являются числовые функции, т. е. функции, областью определения и множеством значений которых являются числовые множества (под числами в школьном курсе понимаются действительные числа). Поэтому первое понятие, о котором приходится говорить,— понятие числа.

Действительные числа. Рассказывая об этом новом расширении известного учащимся понятия числа, уместно напомнить им этапы развития этого понятия, начиная с натуральных чисел, подчеркнув при этом причины, вызвавшие каждое расширение, и характер их связи с практикой. Натуральные числа возникли под влиянием практической потребности в счете предметов, дробные — из необходимости различных измерений. Связь появления отрицательных чисел с практической необходимостью просматривается менее отчетливо, однако и ее можно усмотреть в потребности измерения направленных величин. Совсем, казалось бы, не связаны с практикой иррациональные числа; при их введении мы разъясняем учащимся, что для практических нужд достаточно было бы рациональных чисел, так как, например, измерения всегда производятся с некоторой ограниченной точностью. Однако, если ограничиться только рациональными числами, возникает масса неудобств. Так, например, придется считать, что диагональ квадрата со стороной 1 не имеет «точной» длины, так как нет рационального числа, квадрат которого равен 2 (с доказательством этого утверждения можно рекомендовать учащимся познакомиться самостоятельно либо поручить кому-нибудь из них подготовить его в виде сообщения); не будет выполняться одна из основных аксиом геометрии («для каждых двух точек существует неотрицательное число, являющееся расстоянием между ними»); не у всех положительных чисел будут логарифмы; на прямой будут точки без координат и т. д.

Введение иррациональных чисел, снимая эти и многие другие ограничения, позволяет строить на твердом фундаменте (не опасаясь никаких противоречий) изучение числовых функций средствами математического анализа — раздела математики, имеющего очень важные и разнообразные практические приложения.

Так прослеживаются истоки возникновения абстрактного понятия «действительное число» из потребностей практики, становление этого понятия под влиянием внутриматематических потребностей в снятии ограничений с выполнимости действий над числами и, наконец, его опосредованный выход в практику через математический анализ.

Таким образом, введение действительных чисел нужно для развития теории. Следует отметить, что и предыдущие расширения понятия числа также имели теоретические резоны: введение нуля и отрицательных чисел сделало всегда возможным вычитание и, кроме того, позволило ввести координаты на прямой, а не только на луче; рассмотрение дробей сняло ограничение с деления.

Полезно показать, что здесь нет произвола и свободы: например, мы не можем «изобрести» число, которое служило бы частным от деления пяти на нуль,— это сейчас же привело бы к противоречию; по этой же причине не существует самого большого натурального числа; среди рациональных чисел нет наименьшего положительного числа и т. д. Школьники вполне способны понять, что построить теорию действительного числа — это значит проверить, можно ли считать, что каждая бесконечная десятичная дробь является записью некоторого числа, что с этими числами можно обращаться по некоторым правилам — складывать, умножать, делить, сравнивать — и что введенные ранее правила и законы остаются в силе. Сама эта проверка в школьном курсе не проводится, однако неплохо, если учащиеся будут понимать ее необходимость и даже попробуют проверить какой-либо «кусочек», например транзитивность неравенства.

Очень важным моментом является замечание о том, что введение действительных чисел из теоретических соображений не только снимает трудности развития теории, которая дает практические результаты в дальнейшем, но и немедленно снимает некоторые практические трудности. Например, мы получаем возможность говорить просто о длине окружности или длине диагонали квадрата, а не о ее выражении с какой-то степенью точности. Мы пишем, что это просто $\sqrt{2}$, не ограничивая точность заранее, проводим все возможные выкладки и только окончательный результат выписываем с требуемой точностью.

Таким образом, основной смысл введения действительных чисел — не непосредственное измерение, а теоретическая необходимость иметь «развязанные руки» для применения дифференциального и интегрального исчислений, аппарат дифференциального исчисления прекрасно работает в физике при изучении таких явлений, когда дискретные объекты (например, газ, состоящий из отдельных молекул) ведут себя в целом как непрерывные. Однако в других условиях, например, если рассматривают сильно разреженный газ или если интересуются детально микроструктурой кристаллов или жидкостей, понятие действительного числа и основанные на нем методы математического анализа могут подвести и должны применяться с оглядкой.

Кажется, что мы коснулись слишком глубоких философских вопросов, выходящих за рамки воспитания мировоззрения в школе. Однако на деле здесь речь идет о принципиальной проблеме правомерности переноса теоретических выводов и свойств математических моделей (в данном случае — свойств действительных чисел), так сказать, обратно на реальный мир. Исторический опыт и марксистская теория познания учат, что без проверки соответствия выводов действительности, т. е. без третьей завершающей стадии познания, такой перенос неправомерен и может привести к ошибкам. Приведем пример.

На биологической олимпиаде в Московском университете требовалось ответить на вопрос, сохранится ли некоторый определенный ген в популяции при условиях, заданных в задаче. Школьники (это были десятиклассники) показывали, что число исследуемых генов в популяции убывает по экспоненте, — они даже использовали дифференциальные уравнения. Однако далее они делали неожиданный для составителей задачи вывод: так как показательная функция всегда положительна, то ген никогда не исчезнет. Такой ответ не верен, так как реально не может быть «как угодно малого» числа генов, и, если значение функции становится меньше некоторого числа, то это значит, что реально ген исчезнет совсем. Похожая коллизия возникает и при рассмотрении примера о распаде атомов (см. пример из учебного пособия). Расчет показывает, что через миллион лет от начальной массы радия m_0 останется 10^{-194}-я часть. Учащиеся могут удивиться, так как они, вероятно, слышали, что радий не может существовать миллион лет. Действительно, просто сосчитать, что если бы, например, вся Галактика состояла только из радия, то там было бы всего 10^{66} атомов. Значит, результат 10^{-194} не имеет реального смысла и может пониматься только в переносном смысле, примерно как если бы мы сказали, что за миллион лет всего одна корова может дать столько-то литров молока. Физически же этот результат означает, что весь радий распадается (а может быть, один или несколько атомов останется).

Так углубляется и закрепляется заложенное в восьмилетней школе понимание того, что всякий полученный теоретическим путем результат должен сопоставляться с действительностью, с условиями задачи.

Числовые прямая и плоскость. В связи с действительными числами школьники знакомятся с очень важными понятиями — числовой прямой и числовой плоскостью. Это первый шаг к знакомству с общим понятием пространства. Здесь учащимся явно подчеркивают объединяющую «алгебру» и «геометрию» идею: пространственные отношения и формы могут быть изучены с помощью числовых отношений и, наоборот, числовым отношениям может быть дано геометрическое описание. Это расширяет поле деятельности современной геометрии, которая становится приложимой не только к изучению свойств реального физического пространства, но, через метод координат и общее понятие пространства, и к изучению очень широкого круга явлений. Школьникам дается некоторое представление о применении геометрической интерпретации в алгебре, например для изучения систем линейных уравнений, неравенств с двумя переменными и т. п. Полезно несколько расширить их кругозор, ознакомив их, разумеется, на элементарном уровне, с идеей, лежащей в основе общего понятия пространства, а именно: каждый объект, характеризующийся числом, может быть представлен точкой на прямой; каждый объект, характеризующийся двумя числовыми параметрами, — точкой на плоскости. Например, сплав из двух компонентов (углерод — железо) характеризуется процентным их отношением (один параметр) и изображается точкой на прямой; сплав из трех компонентов характеризуется уже двумя отношениями и изображается точкой на плоскости. Если характеристик больше, то для геометрической интерпретации и изучения свойств объекта приходится пользоваться разработанной в математике геометрией четырехмерного и вообще многомерного (есть даже бесконечномерные) пространства. Эти «геометрии» не могут служить для описания реального физического пространства точно в том же смысле, как обычная трехмерная геометрия, но являются незаменимым средством для изучения целого ряда явлений и решения широкого круга прикладных задач.

Применения такого общего понятия пространства настолько широки, что почти любому специалисту должен быть понятен сам принцип. Например, применяя математические методы в медицине, пользуются тем, что больной, которому нужно поставить диагноз, может быть охарактеризован некоторым набором признаков (температура, длительность заболевания, наличие сопутствующих заболеваний, состав крови и т. д.). Таким образом, состояние этого больного может быть интерпретировано как «точка» в некотором пространстве обычно очень большого числа измерений. Задача установления диагноза (например, выяснить есть у больного инфаркт или нет) сводится к математической так: разбить некоторое множество точек на два подмножества. Эту задачу, как всякую реальную прикладную задачу, математики могут решать только вместе с соответствующими специалистами, в данном случае — с врачами. Поэтому очень важно, чтобы врачи понимали «язык», на котором работают математики.

Аналогичным образом, понятие пространства применяется в теории вероятностей (пространство событий), в металловедении (например, при изучении свойств сплавов), в программировании, в физике (фазовое пространство) и т. д.

Разумеется, нет возможности на уроке разобрать все эти примеры. Достаточно, говоря о числовой прямой и числовой плоскости, «продолжить» идею: естественно, что тройки чисел можно считать «точками» в трехмерном пространстве, четверки — «точками» в четырехмерном «пространстве» и т. д. Дав, таким образом, толчок любознательности школьников, учитель должен быть готовым разъяснить, что понятие многомерного пространства не является только игрой ума, а служит для изучения действительности.

Функция. Числовая функция. В современной программе учащиеся знакомятся с общим понятием функции, что позволяет дать им представление о глубоком идейном единстве различных разделов математики, о значении общих методов, позволяющих единым образом подходить к изучению таких разных на первый взгляд объектов, как геометрические преобразования, с одной стороны, и числовые функции, с другой стороны. Такое понятие функции служит моделью взаимосвязей реального мира, отражением закономерностей, однозначности явлений при одинаковых условиях. Можно сказать, что всякая наука начинается там, где можно указать функциональную зависимость между явлениями или свойствами вещей, т. е. их однозначную взаимосвязь. Всякий научный вывод говорит о том, что всегда, когда есть такие-то условия, будет такое-то явление. В этом смысле общее понятие функции расширяет сферу применения математики на те области, в которых трудно ввести меру, число.

При переходе к изучению числовых функций и повторении общего понятия функции неплохо разъяснить эту сторону.

Однако не менее важно подчеркнуть, что именно числовые функции играют особенно важную роль в математике как аппарате изучения действительности. Это обусловлено тем, что исторически математика была тесно связана с изучением величин, характеристикой которых является число. В естественных науках стараются свойства вещей измерить, найти способ дать им числовую характеристику, а это уже дает возможность применить к изучению этих свойств математический аппарат, а к изучению связей между величинами — аппарат числовых функций. Так, можно рассматривать тригонометрические функции как функции, заданные на множестве углов,— каждому углу ставится в соответствие определенное число, его синус. Однако как плохо было бы изучать эту функцию: ни графика не построить, ни понять, где она возрастает, где убывает. Дело значительно упрощается, если мы в качестве аргумента рассматриваем не угол — геометрическую фигуру, а угол — величину угла. Тут мы сразу получаем числовую функцию, и вопрос при введении радианной меры состоит только в том, какую единицу измерения удобно выбрать: градус, радиан, румб или еще что-нибудь.

П р е д е л и н е п р е р ы в н о с т ь ф у н к ц и и. В школьном курсе понятие предела является в некотором смысле вспомогательным: главное его назначение — формулировка определения производной. С этой точки зрения предварительное знакомство с понятием производной, которое было приведено в первом варианте учебного пособия «Алгебра и начала анализа. 9», было весьма целесообразным, так как объясняло необходимость рассмотрения понятия предела. (Другое дело, насколько удачно это было сделано, вернее, насколько возможно было каждому учителю понять и использовать этот материал без значительной потери времени и смысла того, что было изложено.)

Смысл введения понятия предела в школе бывает трудно объяснить, по нашему мнению, отчасти из-за того, что его разъяснение начинается с рассмотрения примеров непрерывных функций: учащиеся недоумевают, почему для значения непрерывной функции придумывают другое название. Этих трудностей можно в значительной степени избежать, если акцентировать внимание на выявлении характерного свойства непрерывной функции, сопоставляя математические определения и формальный аппарат со свойствами тех объектов, которые изучаются с помощью этого аппарата, а именно: все реальные процессы (или большинство их) характеризуются тем, что участвующие в них величины меняются «без скачков». Это значит, что если какая-то функция принимает в точке x_0 значение $f(x_0)$, то и вблизи этой точки, в окрестности этой точки, при малых изменениях x значения функции f мало отклоняются от $f(x_0)$. Этим свойством функций пользуются на практике, например, когда снимают показания с приборов. Действительно, всякий процесс измерения происходит не мгновенно, а за какой-то конечный промежуток времени. Непрерывные функции хорошо работают потому, что учитывают это свойство: значения функции меняются мало при малых изменениях значений аргумента. Показ того, как это наглядно ясное, но выраженное расплывчатой фразой свойство функций перевести на точный математический язык сам по себе полезен как демонстрация логически строгой формализации свойств реальных объектов.

Интересны примеры функций «из жизни», не являющихся непрерывными. В задаче: «Сколько требуется пятитонных грузовиков для перевозки k тонн груза?» — ответ выражается формулой: $[k:5]+1$. Полезно подчеркнуть, что математическая формула выражает результат «идеализированно»: если k равно, например, 10,01 т, конечно, никто не будет вызывать три грузовика. Любопытный пример разрывной функции, имеющий ясный физический смысл, придумал А. И. Фетисов: «Диск радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω_1; вращение передается на другой диск (рис. 1) радиуса r. Нарисовать график зависимости угловой скорости ω_2 второго диска от расстояния x от точки соприкосновения M до его центра O». Так как линейная скорость вращения в точке соприкосновения постоянна (мы считаем передачу «идеаль-

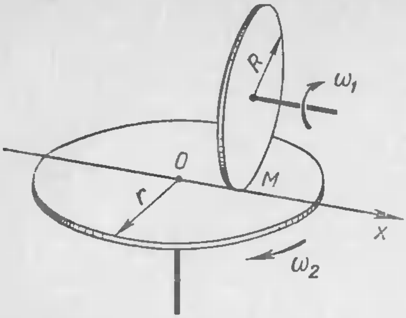


Рис. 1

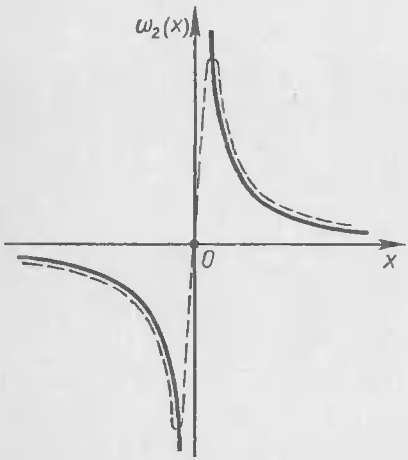


Рис. 2

ной», без проскальзывания), то угловая скорость вращения будет обратно пропорциональна расстоянию от оси: $\omega_2(x) = \frac{\omega_1 R}{x}$. В момент, когда $x = 0$, диск остановится—точка соприкосновения будет в центре второго диска. Когда x станет принимать отрицательные значения, точка соприкосновения перейдет на другую сторону от центра, диск станет вращаться в другую сторону. Искомый график— на рисунке 2. Получается функция с «бесконечным разрывом» в $x = 0$, да еще определенная в этой точке: $f(0) = 0$!

Полезно, разбирая этот пример, указать, что здесь разрыв получается (в отличие от примера с машинами, где он неизбежен, так как связан с дискретностью множества значений функции) в результате идеализации, приближения к реальной ситуации. На самом деле, так как касание — не точечное (потому что диск имеет конечную толщину), график будет примерно такой, как показано на рисунке 2 штриховой линией.

Связывая свойства непрерывности функций с непрерывностью множества действительных чисел, следует заметить: утверждение, что все реальные функции непрерывны, «диалектически противоречиво». С другой точки зрения, с другой степенью точности, если угодно, можно сказать, что, напротив, все реальные функции разрывны. Мы уже касались этого, разбирая пример с радиоактивным распадом. Обобщая, можно сказать, что непрерывная функция может служить аппаратом для исследования явлений тогда, когда можно считать непрерывной исследуемую величину, когда дискретность ее «стирается», смазывается статистическим характером процесса.

Очень ярко проявляется относительность понятия непрерывности при изучении процессов, происходящих «на грани» непрерывности. Например, рост народонаселения в целом по стране можно считать происходящим непрерывно. Если же взять один отдельный город, то уже приближенность будет сильно давать себя знать.

Поэтому, например, для изучения динамики популяций в биологии применяют часто не дифференциальные уравнения, а уравнения в конечных разностях. Но аппарат дифференциальных уравнений настолько удобен, что он применяется и тогда, когда явно не имеет места непрерывность в строгом смысле слова.

Здесь в некотором роде проявляется диалектическое единство противоположностей: с одной стороны, процесс можно считать непрерывным, с другой — он дискретен, причем это связано с количественными характеристиками. Учащимся здесь важно объяснить, что в математике нельзя считать какую-либо величину одновременно и дискретной и непрерывной, но в действительности эти две стороны явлений неразрывно связаны. Выбирая тот или иной математический аппарат, мы отражаем одну из сторон, наиболее нас интересующую.

Производная. Большие возможности для разъяснения мировоззренческих вопросов, показа диалектического характера отражения наукой действительности дает изучение понятия производной.

С одной стороны, учащимся ясен четкий физический смысл: производная есть мгновенная скорость. С другой стороны, с физической точки зрения это словосочетание «мгновенная скорость» внутренне противоречиво. Действительно, понятие скорости возникает (и исторически, и перед учащимися) как средняя скорость, т. е. как физическая величина, измеряемая отношением расстояния к величине промежутка времени, за который это расстояние пройдено. В определении скорости как средней необходимо, чтобы движение происходило в некоторый конечный промежуток времени. Таким образом, возникает противоречие: понятие средней скорости связано с конечным промежутком времени, но при неравномерном движении за любой, как угодно малый промежуток времени эта характеристика не остается постоянной, а говорить о средней скорости в точке нельзя! Это противоречие снимается введением на основе понятия предела нового понятия — мгновенной скорости изменения функции, т. е производной.

Это новое понятие тесно связано со старым: то, что производная в точке x_0 равна a, означает, что около точки x_0 средняя скорость движения будет приближенно равна a. Теорема Лагранжа показывает в некотором смысле «обратную» связь: средняя скорость за какой-либо промежуток времени обязательно равна мгновенной в некоторый момент внутри промежутка.

Следует иметь в виду, что к моменту введения производной понятие мгновенной скорости уже знакомо учащимся из курса физики VIII класса. Если сопоставить определение оттуда с тем, которое можно дать после введения в математике понятия предела, то видно, как помогает математический аппарат, точный язык ввести четкость в терминологию, снять расплывчатость понятий.

Для показа смысла производной и пропедевтики понятия интеграла и первообразной можно использовать пример техни-

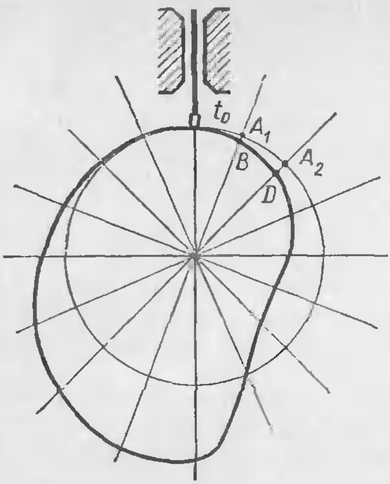


Рис. 3

ческой задачи — анализ кулачкового механизма (рис. 3): требуется, считая, что кулачок вращается вокруг своей оси с постоянной скоростью построить график отклонений конца стержня от начального положения, затем график скорости и график ускорения движения стержня. Пусть в момент $t = 0$ кулачок занял положение, указанное на рисунке 3. Разделим полный угол на несколько частей, в зависимости от того, насколько точно нам требуется построить график. Например, если мы хотим построить 16 точек графика, делим эту окружность на 16 частей. Отклонение от начального положения через одну шестнадцатую периода будет равно по абсолютной величине отрезку A_1B, через две шестнадцатых — отрезку A_2D и т. д. Примерно через $\frac{7}{16}$ периода отклонение станет положительным (если отклонение вверх мы приняли за положительное). График отклонений — на рис. 4, *а*.

Чтобы построить (разумеется, приближенно) график скорости, практически находят среднюю скорость движения за некоторый промежуток времени (обычно берут такой же, какой брали для построения графика отклонений). Путь, пройденный за промежуток $\Delta t = \frac{T}{16}$, т. е. от момента t_6 до момента t_7, изображается отрезком KM и является приращением функции. Чтобы найти среднюю скорость, нужно разделить его на время, т. е. увеличить в 16 раз. Полученный график скорости — на рисунке 4, *б*. Аналогично строится график ускорения. По этому графику (рис. 4, *в*) видно, что максимальное ускорение, а значит, и максимальное усилие на кулачок и стержень будет в момент $t = \frac{T}{2}$. Его ищут для того, чтобы обеспечить должную прочность деталей.

Этот прием — «графическое дифференцирование» — применяется не только при анализе кулачковых механизмов. Если учителю по каким-либо соображениям не захочется использовать этот пример в виде конкретной технической задачи, то все же полезно показать, как по графику функции можно построить график производной. Обычно многие учителя дают задачу построить на одном чертеже график функции и ее производной — или задавая формулу (например, $f(x) = x^3 + x$), или рекомендуя использовать связь знака производной с характером поведения функции. Графическое дифференцирование уточняет качественную картину, дает возможность оценить не только знак, но и модуль производной. Очень заинтересовывает эта задача учащихся, если ее предложить для тригонометрических функций в то время, когда они еще не знают соответствующих формул производных: построить график производной, например, для синуса. У них, естественно, возникает предположение, что производной синуса является косинус, и теоретическое доказательство этого воспринимается с удовлетворением как подтверждение догадки.

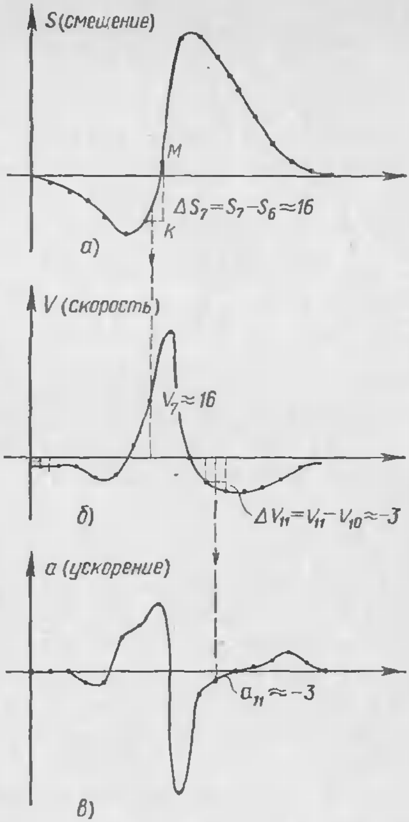


Рис. 4

Рассказав о графическом дифференцировании, полезно подчеркнуть преимущества, которые дает математический аппарат: графические методы неминуемо приближенны; практически они дают достаточную точность, но неудобны, канительны. Аппарат математического анализа освобождает от этой канители. Умея найти производную и первообразную, мы можем их исследовать без сложных и все равно приближенных методов. Однако иногда все же приходится ими пользоваться, например, когда нет формулы или она сложна и неудобна для расчетов.

Основной физический смысл производной, который должны знать учащиеся,— это скорость в прямолинейном движении. Однако, чтобы давать задачи физического содержания с применением как производной, так и интеграла, нужно разъяснить учащимся, что физический смысл производной гораздо шире, чем просто скорость в механическом движении.

Разберем это.

Скорость появляется в наиболее простом случае равномерного движения как отношение двух величин, или, лучше сказать, как коэффициент пропорциональности двух разнородных величин: расстояний (в линейных единицах) и времени (в секундах, минутах, часах и т. п.). Коэффициент пропорциональности v — скорость в формуле $s = vt + s_0$ (1) — находится как отношение

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ и по принципу размерности получает «производную» размерность $\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}, \frac{\text{км}}{\text{ч}} \text{ и т. п.}\right)$. Формула (1) имеет место лишь в простейшем случае, когда движение равномерно, т. е. когда зависимость между расстоянием и временем линейна.

Производная является в некотором смысле обобщением этого коэффициента пропорциональности для неравномерного движения. Тогда вместо формулы (1) появляется $v = \frac{ds}{dt}$, а линейная зависимость $s = vt + s_0$ заменяется общей формулой $s = s(t)$ (связь которой с «линейной формулой» сохраняется, впрочем, «в малом»:

$$s(t) \approx s'(x_0) \cdot (t - t_0) + s(t_0)).$$

Это рассуждение легко переносится и на другие случаи функциональной связи различных величин. Приведем примеры.

В случае постоянного тока сила тока I есть отношение количества электричества ко времени, т. е. $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Эта формула определяет размерность единиц силы тока (Кл/с). Записав по-другому формулу $\Delta Q = I \cdot \Delta t$, получим, что I — это коэффициент пропорциональности между количеством электричества и временем. Для обобщения понятия силы тока на общий случай связи количества электричества со временем, когда эта связь не является прямой пропорциональностью и, значит, сила тока не постоянна, придется повторить все рассуждения, которые проводились при введении понятия производной. В результате получим формулу $I = \frac{dQ}{dt}$, распространяющую понятие силы тока на случай переменного тока, т. е. общее определение силы тока: сила тока есть производная количества электричества по времени.

Аналогично: если масса стержня пропорциональна его длине, линейная плотность стержня есть отношение массы стержня к его длине. Если же зависимость массы от длины нелинейна, а общего вида $m = m(x)$, то линейная плотность есть производная массы по длине: $p = \frac{dm}{dx}$. Давление на дно сосуда есть отношение силы давления к площади дна. Здесь также считается, что давление от точки к точке не меняется. Если же мы рассматриваем давление на боковую сторону стенки сосуда (например, давление на плотину), то оно не является постоянным: оно зависит от глубины. Тогда сила давления на часть плотины до глубины x является функцией от x, причем нелинейной. Повторяя те же рассуждения, придем к тому, что давление есть производная от силы давления по глубине.

Рассмотрев такие интерпретации производной, можно подготовить учащихся к решению обратной задачи (интегрированию), не связывая отыскания площади, пути, количества электричества с истолкованием интеграла как предела интегральных сумм.

Тот факт, что производная служит, так сказать, обобщением коэффициента пропорциональности при линейной зависимости на случай нелинейный, проявляется еще в одном факте, интересном с точки зрения снятия «мистики» с математических моделей. В самом деле, кажется воистину удивительным, что линейная функция $f(x) = kx + b$ одновременно описывает зависимость между длиной стержня и температурой нагревания: $l = l_0(1 + \alpha\Delta t)$, между объемом газа и его температурой при постоянном давлении (закон Гей-Люссака): $v = v_0(1 + \beta\Delta t)$, давлением и температурой газа при постоянном объеме (закон Шарля): $p = p_0(1 + k\Delta t)$, скоростью и временем в равноускоренном движении и т. д. Эти и еще множество других примеров знакомы и понятны учащимся из предыдущих классов.

Получается, что мир устроен очень просто (или мудро?). Возникает соблазн предположить, что это кто-то устроил так специально. Однако стоит внимательней рассмотреть примеры и становится ясным, что эти линейные зависимости или следуют из определений величин (например, для равноускоренного движения), или являются приближениями реальных зависимостей. Например, с изменением температуры длина нагреваемого стержня меняется вовсе не линейно, а по более сложному закону. Закон линейного расширения в своей формулировке говорит о том, что коэффициент α зависит от того, в каком интервале температур рассматривается процесс. Если интервал температур почему-либо необходимо расширить, то для закона линейного расширения уже берется другое выражение: в нем появляется член, пропорциональный квадрату разности температур:

$$l = l_0(1 + \alpha\Delta t + \alpha_1 \cdot (\Delta t)^2).$$

Если надо рассматривать расширение тела также в небольшом, но другом интервале, то нужно изменить значение коэффициента α. Все это показывает, что простая формула получается как первый член разложения функции в ряд*.

Тригонометрические функции и их производные. В восьмилетней школе при первом знакомстве с тригонометрическими функциями учащиеся в основном использовали их для решения треугольников, и эта сторона прикладного значения тригонометрических функций учащимся ясна. В курсе начал анализа на первый план выступают тригонометрические функции как модели особого рода процессов — периодических. И целесообразно при переходе к изучению темы подчеркнуть эту сторону. Если учитель счел возможным в связи с применением производной к приближенным вычислениям немного рассказать учащимся о приближении различных функций многочленами (см. с. 180 настоящего сборника), то естественно отметить, что для некоторого класса процессов более удобной моделью являются

* См. об этом в статье В. А. Далингера (с. 179).

другие функции, а именно тригонометрические, к изучению которых и приступаем. Тогда уместно привести примеры периодических процессов из естествознания, техники: биения сердца (можно показать кардиограмму), колебания силы тока в цепи, дрожание струны, периодические изменения блеска переменных звезд и т. п. Если при этом заметить, что аргументом в таких процессах обычно не является угол, то естественным будет желание определить тригонометрические функции как числовые.

Мы не будем разбирать детально в этой статье вопрос об интеграле, отсылая читателя к статье о связи с геометрией в настоящем сборнике: этот вопрос, действительно, настолько связан с геометрическим материалом, что отдельный его разбор нецелесообразен. Попутно отметим, что вообще выявление связей различных математических понятий (о чем мы частично упоминали), и в частности выявление связей двух, пока еще существующих в школьном курсе математических предметов, само по себе имеет мировоззренческое значение, демонстрируя пример той единой картины мира, того единого подхода, соответствующего всеобщей взаимосвязи явлений, раскрытие которых является одной из наших задач.

Сделаем только одно замечание.

При разъяснении теоремы о необходимом и достаточном условии постоянства функции на промежутке иногда, говоря о физическом смысле этой теоремы, говорят, что иначе и быть не может: если тело стоит, то оно имеет нулевую скорость, а если оно имеет нулевую скорость, то оно стоит. Однако в начальный для движения момент скорость тела всегда обязательно приходится считать равной нулю, т. е. в некотором смысле всякое движение начинается именно с нулевой скорости. Это происходит потому, что причиной ускорения является сила, которая всегда конечна, так что конечным должно быть и ускорение. Значит, тело не может мгновенно увеличить свою скорость с нуля до какого-то значения. Мы здесь опять встречаемся с вопросом диалектики о связи модели и действительности: в механике все функции считаются непрерывными и, более того, дифференцируемыми, причем дифференцируемыми дважды, ускорение также считается непрерывным. Значит, если мы говорим, что поезд сначала шел со скоростью 40 км/ч, а в момент времени $t = 2$ увеличил скорость до 70 км/ч, то нужно понимать, что это — упрощение истинной картины: на самом деле изменение скорости не происходит мгновенно, т. е. на графике движения будет не излом, а закругление.

С и с т е м ы   у р а в н е н и й   и   н е р а в е н с т в имеют достаточно ясную для учащихся прикладную направленность, и поэтому не требуется искать каких-либо дополнительных путей разъяснения связи этой темы с действительностью, ее прикладного значения. Однако полезно воспользоваться тем, что тема является заключительной в курсе, и еще раз подчеркнуть, повторить, развить то, что говорилось в связи с темой «Действительные числа» — о связи алгебраических и геометрических понятий, о роли геометрической интерпретации. Действительно, именно задачи линейного программирования, с которыми встречаются теперь непосредственно на производстве, требуют знакомства с геометрическим истолкованием линейных уравнений и неравенств. При этом не обязательно, чтобы у всех был твердый навык решения таких задач, но обязательно, чтобы все умели сознательно воспринимать решение такой задачи и в особенности ее геометрическую интерпретацию.

Задачи линейного программирования пока не являются программным материалом, однако для воспитания правильного понимания роли и места изучаемого в последней теме материала ничто не мешает учителю привести один-два примера решения такой задачи. По сравнению с тем, когда решение систем неравенств рассматривается только в чисто теоретическом плане, воспитательный эффект будет заметно больше, а дополнительного времени не потребуется.

Сделаем еще одно замечание по поводу решения линейных систем методом Гаусса. Учащиеся, особенно те, которые любят и умеют решать нестандартные задачи, иногда внутренне сопротивляются требованию решить систему обязательно по указанному правилу. Действительно, иногда бывает, что в данном случае система проще решается каким-либо другим приемом. Чтобы не создавать у учащихся впечатления формальности требования, полезно разъяснить, что одним из преимуществ метода Гаусса является его общность, его «алгоритмичность»: решая систему по такому правилу, всегда можно добиться результата, не надо думать над выбором пути. Это очень важно при использовании вычислительной техники: в машину можно заложить одну программу на все случаи. При этом машине неважно, что такое стандартное решение иногда требует больше времени, чем искусственный прием, и можно быть спокойным: если для решения какой-либо задачи потребуется решить линейную систему, то машина это сделает.

Итак, мы обсудили некоторые возможности формирования материалистического взгляда на природу математики, ее роль и значение.

Перейдем теперь ко второму, не менее важному аспекту воспитания мировоззрения — формированию и развитию диалектического мышления. В общую задачу формирования диалектико-материалистического мировоззрения включается усвоение основных категорий и законов диалектики. Общие представления об этом учащиеся получают при изучении обществоведения в X классе. Остается совсем мало времени на развитие этих представлений, наполнение их конкретным содержанием. Для того чтобы категории и законы диалектики не остались для учащихся голыми абстракциями, необходимо заранее систематически обращать их внимание на частные проявления этих законов и конкретизации категорий.

Как уже отмечалось, содержание курса начал анализа представляет благодатный в этом отношении материал, поскольку основные понятия математического анализа — «предел», «непрерывность», «производная», «интеграл» — отражают объективные процессы движения, изменения, диалектичные по своей сущности.

Наметим некоторые отправные пункты для формирования диалектических представлений.

Как известно, «ядро» диалектики составляет «учение о единстве противоположностей» (см.: В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 29, с. 203).

Оперируя противоположностями, «ум человека не должен брать эти противоположности за мертвые, застывшие, а за живые, условные, подвижные, превращающиеся одна в другую» (Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 98). Примером такого единства, взаимопроникновения противоположностей является математика в целом, ее природа и сущность. С одной стороны, математика — это совокупность «абстрактных образов реального мира», а с другой — «идеальная техника», т. е. набор искусственно создаваемых логических построений (моделей), используемых по мере необходимости и возможности для изучения действительности. «Подобно тому как материальная техника извлекает из природы разнообразные материалы, преобразует и комбинирует их, создавая человеку средства для овладения природой в практической деятельности, так и математика, извлекая из природы путем абстракций свои первоначальные понятия, преобразуя и комбинируя их, создает средства для теоретического овладения природой» (Александров А. Д. Математика и диалектика.— МШ, 1972, № 1, с. 7). В беседе, вводящей в изучение начал анализа, уместно рассказать учащимся об истории возникновения математического анализа как аппарата, изобретенного Ньютоном для решения задач механики. Впоследствии этот аппарат оказался приложимым к широкому кругу задач из самых различных областей науки и практической деятельности. Материалы для такой беседы можно почерпнуть в книге Н. Я. Виленкина «Функции в природе и технике», (М., Просвещение, 1978).

При изучении темы «Действительные числа», в экскурсе о развитии понятия «число», следует подчеркнуть роль взаимодействия двух противоположностей — дискретного и непрерывного как движущей силы этого развития. «Обращение с дискретными предметами породило счет... Измерение есть не что иное, как применение дискретного к непрерывному. Так, непрерывное расстояние измеряется шагами, которые считают. Целых чисел оказалось недостаточно, и именно из потребности измерения возникли дроби» (Александров А. Д. Математика и диалектика.— «МШ», 1972, № 2, с. 5). Древним грекам «непрерывная величина представлялась состоящей из ничтожно малых частиц, которые в принципе можно считать... Соответственно всякая величина измерялась рациональными числами. Число было рациональным» (там же, с. 5). Открытие несоизмеримых отрезков опрокинуло эти представления и привело к изобретению иррациональных чисел.

Представление о *множестве действительных чисел как* о «числовой прямой», т. е. о связи этого множества с геометрической прямой, снова сводит непрерывное к дискретному, «хотя и в гораздо более тонком смысле» (там же, с. 6): мы мыслим прямую как непрерывную линию и в то же время как множество точек, каждая из которых обладает своей индивидуальностью в виде числа, ей соответствующего.

Весьма поучителен с точки зрения формирования диалектического мышления так называемый «парадокс существования», который можно показать на примере иррациональных чисел. С практической точки зрения иррациональных чисел не существует: результат любого измерения выражается рациональным числом. Однако они существуют в математической теории как результат мысленного эксперимента, обнаруживающего, что для любого отрезка, выбранного в качестве единицы измерения, существуют отрезки, с ним несоизмеримые, т. е. такие, длина которых не может быть выражена рациональным числом. Этот пример достаточно выпукло иллюстрирует характер существования в математике и смысл слова «существует» применительно к математическим объектам. Однако учащиеся не должны думать, что иррациональные числа являются в этом отношении каким-то исключением. В такой же мере существуют (в математике) и не существуют (в реальности) натуральные числа, геометрические фигуры и т. д. «Всякое существование в математике условно, так как оно есть существование идеализированного объекта» (Александров А. Д. Математика и диалектика.— МШ, 1972, № 1, с. 9).

Единство противоположностей — конечного и бесконечного — отражено в понятии бесконечного множества. Это удобно продемонстрировать на примере натурального ряда. С одной стороны, учащиеся знают, что натуральный ряд бесконечен, он может быть неограниченно продолжен; с другой стороны, говоря, например, что множество натуральных чисел является подмножеством множества действительных чисел, они мыслят это множество как нечто завершенное, как совокупность всех натуральных чисел. Вообще, употребляя слово «все» применительно к бесконечной совокупности объектов, мы объединяем в одном понятии два противоположных представления — о конечном и о бесконечном.

В этой связи на факультативных занятиях по теме «Бесконечные множества» целесообразно познакомить учащихся с парадоксами, связанными с понятием «бесконечное множество», например с парадоксом Бертрана Рассела о множестве M всех множеств, не включающих себя в качестве элемента. Любой ответ на вопрос, включает ли себя множество M в качестве элемента, приводит к противоречию. Если — да, то M не должно было бы включать себя, по определению этого множества. Если — нет, то оно должно было бы включать себя, так как, по определению, содержит все множества, не включающие себя в качестве элемента. Этот парадокс показывает, что со словом «все» применительно к бесконечной совокупности объектов надо обращаться с осторожностью; слишком свободное оперирование понятием «бесконечное множество» может привести к абсурду. Рассказ о роли парадокса Рассела и других парадоксов теории множеств в истории науки — хорошая иллюстрация положения о противоречии, как об источнике и движущей силе развития. Прочитать об этом можно, например, в книге Б. В. Бирюкова и В. Н. Тростникова «Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики» (М., Знание, 1977).

Нелишне заметить, что зародыш, зерно противоречий кроется уже в самом понятии «множество», которое Георг Кантор, создатель теории множеств, охарактеризовал так: множество — это многое, мыслимое как единое.

Несколько подробнее стоит поговорить о том, как в понятиях математического анализа отображается движение, изменение. О трудностях отображения движения в понятиях В. И. Ленин писал: «Мы не можем представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, угрубив, не разделив, не омертвив живого. Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление,— и не только мыслью, но и ощущением, и не только движения, но и всякого понятия. И в этом суть диалектики» (Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 233).

Для того чтобы учащиеся почувствовали трудности, связанные с осмыслением движения, и оценили роль математики в их преодолении, целесообразно рассказать им (быть может, на факультативных занятиях) об апории (парадоксе) Зенона Элейского (V в. до н. э.) об Ахиллесе и черепахе, суть которого заключается в следующем: Ахиллес, который движется в 10 раз быстрее черепахи, никогда не догонит ее, так как за то время, что Ахиллес пройдет расстояние, отделяющее его от черепахи, черепаха пройдет 1/10 этого расстояния; когда Ахиллес пройдет и это расстояние, черепаха продвинется вперед на 1/100 первоначального расстояния и т. д. до бесконечности. Абсурдность утверждения, что быстроногий Ахиллес не догонит черепаху, очевидна, однако далеко не очевидна ее причина: рассуждение Зенона кажется вполне логичным. Эта и другие апории Зенона, относящиеся к движению (всего их четыре — «Дихотомия», «Ахиллес», «Стрела» и «Стадий») в течение многих веков были предметом размышлений и споров ученых и мыслителей; единого мнения по этому вопросу нет и в настоящее время. Одно из современных объяснений апории таково: Зенон не располагал понятием предела последовательности и ошибочно считал, что сумма бесконечно большого числа слагаемых, хотя бы и очень малых, всегда должна быть бесконечно большой. На самом деле это не всегда так, и в данном случае сумма конечна. При изучении вопроса о сумме бесконечной геометрической прогрессии при $|q|<1$ можно предложить учащимся вычислить путь, который пройдет Ахиллес прежде, чем догонит черепаху.

Интересные соображения по этому поводу, высказанные Л. Н. Толстым, приведены в журнале «Квант» № 10 за 1978 г.

Об апориях Зенона и различных их толкованиях можно прочесть в сборнике избранных работ С. А. Яновской «Методологические проблемы науки». М., Мысль, 1972, с. 214—234.

Вообще предельный переход является специфическим методом математического анализа, позволяющим отобразить, выразить, описать в четких математических понятиях (предел, непрерывность, производная и др.) такие общие идеи, как изменение, его непрерывность, неограниченность в сторону уменьшения или увеличения. При этом «бесконечно малое» и «бесконечно большое» в анализе сосуществуют в диалектическом единстве и взаимспереплетении. Так, в понятии «предел последовательности» взаимосвязаны бесконечное возрастание номера члена последовательности и бесконечное уменьшение различия между членами последовательности и ее пределом; в понятии интеграла, как предела суммы, заключено представление о сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.

Подводя итог изучению начал анализа, следует обратить внимание учащихся на диалектический характер анализа в целом. Его составные части — дифференциальное и интегральное исчисление — представляют собой взаимосвязанные противоположности: в дифференциальном исчислении рассматривается в основном поведение функции в точке и непосредственной близости от нее, или, как говорят, локальные свойства функций (непрерывность в точке, предел в точке, производная и дифференциал в точке); с помощью понятия «интеграл» описываются и изучаются «глобальные» свойства функций, т. е. поведение функции на множестве, не зависящее, вообще говоря, от ее поведения в отдельных точках. Такое соединение и взаимодействие двух противоположных тенденций оказалось чрезвычайно плодотворным. Достаточно сказать, что это дало возможность вычислять общими и простыми методами площади фигур, объемы тел, длины кривых, массу, работу, количество тепла и т. д. Объемы цилиндра и шара, площади некоторых криволинейных фигур умели вычислять еще в Древней Греции. Но при этом использовались сложные и искусственные приемы, пригодные лишь для частных случаев. Попытки найти общий метод, атакуя проблему «в лоб», натолкнулись на непреодолимые трудности. И только «обходный маневр», применяемый в анализе, т. е. подход к глобальным, интегральным свойствам функций через их локальные характеристики (осуществляемый с помощью теоремы Лангранжа и формулы Ньютона — Лейбница) дал желаемый эффект. Теперь каждый школьник умеет простыми и общими методами вычислять площади криволинейных фигур произвольной формы, объемы тел, работу переменной силы и др.

В заключение несколько слов о формах рассмотрения мировоззренческих вопросов в процессе преподавания начал анализа. Прежде всего следует подчеркнуть, что основным условием воспитательного эффекта является тесная связь с преподаванием математики. Рассмотрение мировоззренческих вопросов не должно превращать ни преподавание в целом, ни даже отдельный урок в преподавание начал философии или истории математики, равно как решение прикладных задач не должно иметь целью дать учащимся какие-либо специальные профессиональные навыки. Очень важно, чтобы материал мировоззренческого характера органически сливался с изучением соответствующих учебных вопросов. Например, в начале изучения тригонометрических функций замечание о их роли как моделей периодических процессов сразу же связывается с текущим материалом, так как обосновывается необходимость определения тригонометрических функций как функций числового аргумента; начав рассмотрение вопроса о производной с рассмотрения трудностей введения понятия скорости для неравномерного движения, естественно переходим к сути вопроса — определению производной через понятие предела; изучение метода Гаусса можно предварить разъяснением роли алгоритмов и затем объявить, что мы изучим метод, которым можно решить любую систему.

Некоторые вопросы требуют определенного специального времени на вступительное слово учителя или его завершающую, обобщающую беседу. Таковы, например, история возникновения математического анализа, роль дифференциальных уравнений в науке и технике и т. д. В других случаях основную роль играют замечания и реплики учителя по ходу дела. Например, нет возможности (и необходимости) подробно заниматься вопросом о представлении функций многочленами. Но, указав, что формула $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ дает возможность приближенно представить всякую дифференцируемую функцию как линейную, можно заметить, что более точное приближение дает формула, в которой есть член второй степени относительно $(x - x_0)$, и что в математике есть теорема, утверждающая, что всякую кривую можно с любой степенью точности приблизительно задать многочленом (правда, иногда очень большой степени). Такие реплики учителя могут быть в ряде случаев началом более подробной беседы на факультативных занятиях. В других случаях возможно дать отдельным учащимся подготовить сообщение по вопросу, например, о тригонометрических функциях в природе и технике, о физическом смысле производной и т. п.

Очень эффективным приемом является решение задач прикладного содержания. К сожалению, решение таких задач отнимает обычно много времени, а в ряде случаев недоступно учащимся. Поэтому иногда следует показать учащимся готовое решение, чтобы, не отвлекаясь на техническую сторону дела, сосредоточить внимание на содержательной стороне дела. Очень удобны и эффективны всякого рода таблицы, рисунки, кодопозитивы.

И. Л. Никольская

О НЕКОТОРЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ТРУДНОСТЯХ КУРСА И ВОЗМОЖНОСТЯХ ИХ ПРЕОДОЛЕНИЯ

1. При изучении начал анализа учащиеся сталкиваются с рядом трудностей логического характера, проистекающих из самой сущности математического анализа, из особенностей его понятий и метода. При разработке методики изучения отдельных вопросов курса и всего курса в целом эти трудности необходимо иметь в виду; не уделив им достаточного внимания, едва ли можно рассчитывать на полноценное усвоение курса всеми учащимися.

Основными понятиями математического анализа, вошедшими в школьный курс, являются — «предел функции», «непрерывность функции», «производная», «интеграл». Все эти понятия так или иначе связаны с идеей предельного перехода — основного метода математического анализа. Идея предельного перехода, в свою очередь, связана с идеей бесконечного изменения (возрастания или убывания). Для адекватного выражения этих идей в математике выработаны специальные языковые конструкции, сложность и своеобразие которых — одна из причин трудностей изучения анализа.

Рассмотрим, например, определение предела последовательности, с которым учащиеся знакомятся в начале изучения курса.

Число a называется пределом последовательности (x_n), если *для любого* положительного числа ε *найдется* такое натуральное число N, что *при всех* $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

В этом определении в точных, недвусмысленных математических терминах и знаках («положительное число (действительное)», «натуральное число», «$>$», «$<$») выражена идея бесконечного уменьшения различия между членами последовательности (x_n) и некоторым числом a при бесконечном возрастании n. Выделенные слова составляют остов фразы, которой выражено определяющее, задают его логическую структуру. Аналогичную логическую структуру имеют определения предела и непрерывности функции в точке.

Слова «все» («всякий», «каждый», «любой») и «существует» («есть», «найдется», «хотя бы один») называются в логике кванторами общности и существования соответственно. Кванторы явно или неявно присутствуют во всяком определении и теореме. Однако для большинства предложений математического анализа характерно наличие нескольких кванторов. Это обстоятельство, являясь существенным препятствием для непосредственного уяснения смысла определений и теорем анализа, осложняет работу с ними, вносит в нее определенную специфику.

Одна из мер, способствующих снятию трудностей усвоения понятий и предложений математического анализа,— предварительное выяснение их содержания на интуитивно-наглядном уровне. Однако эта мера не снимает всех трудностей. Так, например, в понимание определения входит умение охарактеризовать объекты рассматриваемой области, не удовлетворяющие этому определению, т. е. сформулировать отрицание определяющего предложения. Но способ построения отрицаний предложений с кванторами не является интуитивно очевидным. Поэтому попытки построить отрицания таких предложений часто бывают неудачными, ведут к ошибкам. Между тем существует простое правило, дающее возможность почти не задумываясь, автоматически, безошибочно построить отрицание предложения с кванторами: для того чтобы построить отрицание предложения с кванторами, достаточно каждый квантор общности заменить квантором существования, и наоборот, и построить отрицание предложения, стоящего за кванторами. Это правило основано на тождестве смыслов таких предложений, как «Неверно, что все x обладают свойством P» и «Существует x, не обладающий свойством P», а также «Неверно, что существует x, обладающий свойством P» и «Все x не обладают свойством P».

С помощью этого правила легко выяснить, что утверждение «Число a не является пределом последовательности (x_n)» имеет следующий точный смысл: существует положительное число ε такое, что для всякого натурального числа N существует $n > N$ такое, что $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$.

Следует обратить внимание учащихся и на такое важное и вместе с тем интуитивно неочевидное обстоятельство, как существенность порядка, в котором следуют выражения с кванторами. Например, предложение «Для всякого натурального числа существует большее натуральное число», утверждающее, что натуральный ряд бесконечен, является истинным, а предложение «Существует натуральное число, большее всякого натурального числа», очевидно, ложно. Рассмотрим другой пример, менее очевидный. Предложения «Каждую задачу решил по крайней мере один ученик» и «По крайней мере один ученик решил каждую задачу» отличаются только порядком вхождения в них выражений с кванторами и на первый взгляд могут показаться одинаковыми по смыслу. Однако элементарный анализ обнаруживает, что это не так. Положим для определенности, что речь идет о трех задачах и четырех учениках.

з \ у	1	2	3	4
1	+			
2		+		
3				+

На таблице, где «+» на пересечении m-й строки и n-го столбца означает, что m-ю задачу решил n-й ученик, изображена ситуация, в которой предложение «Каждую задачу решил по крайней мере один ученик» истинно, а предложение «По крайней мере один ученик решил каждую задачу» ложно. Второе предложение окажется истинным лишь в том случае, когда «крестики» будут заполнять хотя бы один столбец.

Вообще предложения вида «Существует y такой, что для всякого x выполняется $P(x, y)$» и «Для всякого x существует y такой, что выполняется $P(x, y)$» отличаются друг от друга тем, что в первом случае y не зависит от x, для всех x его значение одно и то же, а во втором случае y, вообще говоря, зависит от x, т. е. для каждого значения x существует «свое» значение y. Рассмотрим, например, определение «Функция f называется периодической, если для нее существует такое число $l \neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $x - l$ и $x + l$ также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x - l) = f(x) = f(x + l)$». То, что в определяющей части этого определения выражение «существует такое число $l \neq 0$» стоит на первом месте, означает, что число l для всех x одно и то же; если же в формулировке определения поменять местами выражения «существует такое число $l \neq 0$» и «при любом (для любого) x из области определения функции» (что часто, не придавая значения порядку слов, делают ученики), то оно приобретет совсем другой смысл. Такому определению будет удовлетворять, например, функция f, график которой изображен на рисунке 1, т. е. функция, заданная формулой $y = b$ на множестве $]-\infty; -a] \cup [a; \infty[$, где $a > 0$. В самом деле, здесь для всякого x из области определения f найдется «свое» число $l \neq 0$, такое, что $x + l$ и $x - l$ также принадлежат этой области и $f(x - l) = f(x) = f(x + l)$; для каждого x в качестве l можно взять любое число, не меньшее $|x| + a$. Функция f не является периодической, так как не существует такого числа l, которое годилось бы для всех x: для всякого l найдется x такое, что $l < |x| + a$.

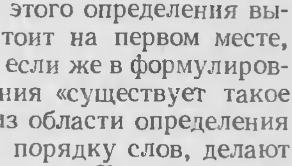


Рис. 1

Заметим, что определение периодической функции, приведенное выше, избыточно. Более коротко его можно сформулировать так: функция f называется периодической, если существует такое число $l \neq 0$, что для любого x из области определения f, числа $x - l$ и $x + l$ также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x) = f(x + l)$. Условие «для любого x $f(x - l) = f(x)$» отсюда следует. В самом деле: вместе с любым x из области определения f этой области принадлежит $x - l$; для любого x из области определения f справедливо равенство $f(x) = f(x + l)$; подставив в это равенство $x - l$ вместо x, получим равенство $f(x - l) = f(x)$, справедливое для любого x из области определения f.

Если в этой сокращенной формулировке определения периодической функции поменять местами выражения с кванторами, то получим: для любого x из области определения f существует $l \neq 0$ такое, что $x + l$ и $x - l$ принадлежат этой области и $f(x) = f(x + l)$. Этому условию удовлетворяет, например, функция, заданная формулой $y = x^2$ на множестве $]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$.

В определениях предела и непрерывности функции на языке $\varepsilon - \delta$ порядок вхождения выражений с кванторами (для всякого $\varepsilon > 0$ существует...) указывает на то, что δ, вообще говоря, зависит от ε, т. е., как правило, будет различным для разных ε.

Манипулировать предложениями с кванторами значительно легче, если они представлены не смешанными словесно-символическими, а чисто символическими записями, в которых, наряду с математическими символами и обозначениями, используется логическая символика (см.: Калужнин Л. А. Элементы теории множеств и математической логики в школьном курсе математики. М., Просвещение, 1978, а также факультативный курс «Избранные вопросы математики», 7—8 классы. М., Просвещение, 1978, с. 111).

Однако и без использования логической символики, и даже без употребления слова «квантор» выяснение с учащимися на примерах особенностей и свойств предложений с кванторами вполне возможно, не потребует много времени и принесет ощутимую пользу.

2. С усвоением понятий курса «Алгебра и начала анализа» связан ряд других трудностей, имеющих общий характер, однако более остро ощущаемых при изучении именно этого курса. Так учащиеся часто смешивают понятия «нечетная функция» и «функция, не являющаяся четной». Чтобы предупредить подобные ошибки, учащимся следует разъяснить (показать на схеме), что, определяя тот или иной вид какого-либо понятия (последовательности, функции и т. д.), мы выделяем в исходном множестве A подмножество B объектов, удовлетворяющих определению, и тем самым подмножество $C = B'_A$ объектов, ему не удовлетворяющих (см. рисунок 2). Всякое определение явно, непосредственно задает множество B и неявно, косвенно — множество C. Для того чтобы получить явное задание множества C, достаточно построить отрицание определяющей части определения. Например, такие понятия, как «четная функция» и «не

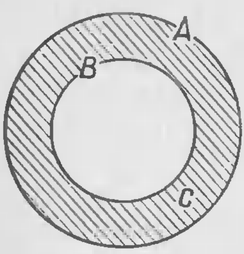


Рис. 2

четная» (не являющаяся четной) функция, вводятся одним и тем же определением и представляют собой, по существу, две стороны одного и того же понятия. Иное дело — понятия «четная функция» и «нечетная функция»; они вводятся различными определениями и являются существенно различными. Множества объектов, им удовлетворяющих, не являются взаимно дополнительными до множества всех функций. Соотношение между этими понятиями изображено на рисунке 3, причем ни одно из четырех подмножеств множества всех функций не является пустым. Очень полезным упражнением, помогающим понять и усвоить соотношение понятий «четная функция» и «нечетная функция», является доказательство непустоты каждого класса, т. е. подыскание соответствующих примеров. Наименее очевидно здесь существование функции, четной и нечетной одновременно; этому условию удовлетворяет любая функция, заданная формулой $y = 0$ на множестве, симметричном относительно начала координат.

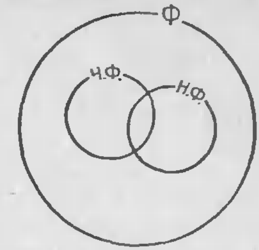


Рис. 3

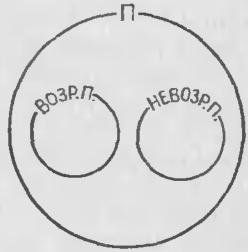


Рис. 4

Аналогично обстоит дело с понятиями «возрастающая (убывающая) последовательность» и «невозрастающая (неубывающая) последовательность». Эти понятия не являются взаимно дополнительными до родового понятия «последовательность»; соотношение между ними изображено на рисунке 4.

Невозрастающие последовательности являются видом последовательностей, не являющихся возрастающими. Примером последовательности, не являющейся ни возрастающей, ни невозрастающей, может служить такая (x_n), для которой $x_n = (-1)^n \cdot n$.

Нелишне обратить внимание учащихся на то, что в случаях, когда с помощью «не» образуется понятие, не существенно новое, а лишь дополняющее данное понятие до родового, «не» с прилагательным, выражающим видовое отличие данного понятия, пишется раздельно («не четная», «не убывающая» и т. п.). Слитное написание («нечетная», «неубывающая») используется для понятий, существенно новых, требующих специального определения. В устной речи, во избежание путаницы, следует, когда это нужно, отделять «не» от прилагательного каким-нибудь подходящим словом («есть», «является» и т. п.).

3. Особого внимания при изучении начал анализа заслуживает вопрос об условиях, необходимых или достаточных для выполнения утверждения о существовании объекта или его свойствах. Умение перейти от формулировки какого-либо утверждения в виде условного предложения («Если A, то B») к равносильной формулировке в виде «достаточного условия» или «необходимого условия»

и обратно помогает глубже понять смысл этого утверждения, «прочувствовать» связь между понятиями, о которых идет речь.

Полезно, например, после изучения понятия производной функции в точке привести в некоторую систему знания учащихся о его взаимосвязи с предшествующими понятиями, построив такую «ретроспективную» цепочку следований:
(f имеет производную в точке x_0) $\Rightarrow$ (f непрерывна в точке x_0) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (f имеет предел в точке x_0) $\Rightarrow$ (f определена во всех точках некоторой «проколотой» окрестности точки x_0, т. е. окрестности, из которой исключена сама точка x_0).

Такая запись в концентрированном виде представляет важнейшие сведения об этих понятиях, рассыпанные по различным разделам курса. Чтобы актуализировать эти сведения в сознании учащихся, можно предложить им, пользуясь «цепочкой», как ориентировочной основой, ответить на такие, например, вопросы:

1) Каково достаточное условие а) непрерывности функции в точке, б) существования предела в точке?

2) Сформулируйте необходимое условие существования предела функции в точке. Является ли это условие необходимым для: а) непрерывности функции в этой точке, б) существования производной функции в этой точке?

3) Сформулируйте достаточное условие несуществования а) предела функции в точке, б) непрерывности функции в точке, в) производной функции в точке. Какие из этих условий будут общими для а), б) и в)?

4) Функция f определена в точке x_0, но не определена ни в какой окрестности этой точки. Что можно сказать о свойствах функции f в точке x_0?

5) Может ли функция, разрывная в точке, а) иметь производную в этой точке, б) иметь предел в этой точке?

Разумеется, подобные вопросы имеет смысл задавать учащимся лишь в том случае, если они владеют понятиями «необходимое условие», «достаточное условие», сущность которых можно выразить определением «Если из предложения A следует предложение B, то говорят, что A — достаточное условие B, а B — необходимое условие A», а также знают, что предложения $A \Rightarrow B$ и (не B) $\Rightarrow$ (не A) равносильны, откуда следует, что невыполнение условия, необходимого для A, является достаточным для (не A) (см. об этом статью И. Л. Никольской «Об изучении некоторых логических понятий на уроках математики» в сб. «Из опыта преподавания математики (6—8 классы)». М., Просвещение, 1977).

Владение понятиями «достаточное условие», «необходимое условие» требуется при распознавании объектов на основании определений соответствующих понятий. Учащиеся должны понимать, что в определении указан признак, необходимый и достаточный для принадлежности объекта объему данного понятия. Однако определяющий признак может быть сложным, составленным из нескольких признаков (свойств), наличие каждого из которых у данного объекта необходимо для его принадлежности к объему данного понятия; иначе говоря, отсутствие этого свойства у объекта свидетельствует о его непринадлежности к объему понятия. Рассмотрим, например, определение «Функция называется четной, если вместе с каждым значением переменной x из области определения значение $-x$ также входит в область определения этой функции и при этом выполняется равенство $f(-x) = f(x)$». Если для данной функции не выполнено условие «вместе с каждым значением переменной x из области определения значения $-x$ также входит в область определения», то эта функция не является четной, какой бы формулой она ни была задана. Так, например, функция $y = x^2$, заданная на множестве неотрицательных чисел, не является четной. Соображения удобства распознавания определяют методическую целесообразность избыточности некоторых определений, например определения периодической функции.

Вопрос о необходимых и достаточных условиях затрагивается в курсе в связи с понятиями максимума и минимума. При этом в определениях точек экстремума на функцию не накладывается никаких ограничений. Далее же, при обсуждении вопросов о необходимых, а затем о достаточных условиях существования экстремума речь идет только о непрерывных функциях: для дифференцируемых функций доказывается необходимость равенства производной нулю, на примерах непрерывных функций показывается возможность существования, а также несуществования экстремума в точке, где функция не имеет производной, доказываются теоремы о достаточных условиях существования экстремума в точке, где функция непрерывна. Учителю надо иметь в виду (не заостряя на этом внимания учащихся), что условие «производная равна нулю или не существует» необходимо для существования экстремума любой функции. Если это условие не выполнено, т. е. производная в точке существует и не равна 0, то функция в этой точке возрастает или убывает, откуда следует, что в ней нет экстремума (это легко доказать на основании определений возрастания (убывания) функции в точке и точки максимума (минимума)). Напротив, в теоремах о достаточных условиях существования экстремума требование непрерывности функции существенно. Если это требование не выполнено, то перемена знака производной при переходе через точку не будет достаточным условием существования экстремума в этой точке (см. рис. 5).

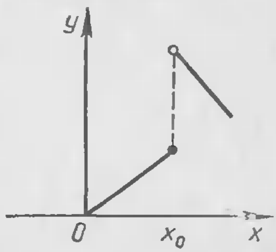


Рис. 5

С помощью терминов «необходимое условие», «достаточное условие» удобно резюмировать обсуждение довольно запутанного вопроса об отношении между понятиями «возрастание функции в точке» и «возрастание функции на множестве» (см. статью А. Я. Блоха «Возрастание функции в точке и на множестве», МШ, 1978, № 6). Возрастание функции в каждой точке множества не является, вообще говоря, ни необходимым, ни достаточным условием возрастания функции на множестве. Приведем подтверждающие примеры:

1) Функция $\operatorname{tg} x$ возрастает в каждой точке области определения, но не возрастает на этом множестве (условие не является достаточным).

2) Функция x^2, определенная на R, возрастает на множестве $[0; \infty[$, но не возрастает в точке 0 (условие не является необходимым).

Для возрастания функции на интервале условие ее возрастания в каждой точке этого интервала является достаточным и необходимым.

4. Обсудим некоторые логические тонкости, связанные с важнейшими понятиями курса — производной и первообразной. В курсе IX класса сразу после введения понятия «производная функции в точке» рассматриваются примеры вычисления производных некоторых функций. Здесь есть опасность смешения двух различных понятий — «производная функции в точке» и «производная функция данной функции». Для достижения сознательного усвоения учащимися этого материала и во избежание распространенных ошибок при отыскании производной в точке целесообразно специально выяснить различие между понятиями «производная функции в точке» и «производная (функция) данной функции», сделать явным переход от первого понятия ко второму. Для этого после введения понятия «производная функции в точке» следует подчеркнуть, что в примерах на вычисление производной по определению речь идет о произвольной, но фиксированной точке x (для большей ясности можно даже сохранить в этих примерах обозначение x_0). Если же в выражении для $f'(x)$ считать x переменной, то получим выражение, задающее функцию f', значениями которой служат производные функции f в различных точках; областью определения функции f' является множество тех точек $D(f)$, в которых f имеет производную. Функция f' называется производной функции f. Такое разъяснение поможет достичь четкости в употреблении учащимися родственных, но различных по значению терминов и отчетливого понимания соотношения понятий, этими терминами обозначаемых.

Выяснение характера взаимосвязи между функциями f и f' поможет учащимся в дальнейшем понять и усвоить определение первообразной для данной функции на промежутке (функция F называется первообразной на заданном промежутке для функции f, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$).

Ученику, уяснившему, что область определения производной данной функции может быть у́же, но не шире области определения самой функции, легко понять, что заданный промежуток должен быть подмножеством естественной области определения функции F, во всех точках которого 1) функция F дифференцируема, 2) функция f определена. Уяснив, что эти условия необходимы для того, чтобы функция F была первообразной функции f на данном промежутке, ученик не будет думать (как это часто бывает), что промежуток выбирается совершенно произвольно или что его указание излишне.

Понимая необходимость условий 1) и 2), ученик сможет пользоваться ими при распознавании первообразных. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, можно сразу, не производя проверки равенства $F'(x) = f(x)$, сказать, что F не является первообразной для f на данном промежутке. Например, функция $F(x) = |x|$ не является первообразной ни для какой функции на промежутке, содержащем 0, так как не выполнено первое условие: при $x = 0$ эта функция не имеет производной (однако функции, заданные формулой $F(x) = |x|$ на промежутках $]0; \infty[$ и $]-\infty; 0[$, являются первообразными для функций $f(x) = 1$ и $f(x) = -1$ соответственно).

Для функции $\frac{1}{x}$ ни на каком промежутке, содержащем точку 0, не выполнено второе условие. Поэтому на вопрос, является ли функция F первообразной функции $\frac{1}{x}$ на R, следует сразу же, не дифференцируя функции F, ответить отрицательно.

5. В заключение разберем вопрос о равносильности уравнений, неравенств и их систем, связанный с последней темой курса «Системы уравнений и неравенств». В соответствующей главе учебного пособия для IX — X классов дается определение: «Два уравнения называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений» (1). Это определение, если понимать его буквально, не согласуется с определением равносильных предложений, данным в учебнике «Алгебра 7»: «Если из первого предложения следует второе и из второго следует первое, то эти предложения называются равносильными» (2). В самом деле, уравнения $x = 1$ и $x + y - y = 1$ имеют разные множества решений ($\{1\}$ и $\{(x, y) \mid x = 1, y \in R\}$ соответственно), однако каждое из них следует из другого; уравнения $x = 1$ и $y = 1$ имеют одно и то же множество решений, однако ни одно из них не следует из другого.

Положение легко исправить, дополнив определение (1) следующим образом: «Два уравнения с одними и теми же переменными называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений» (3). Такое определение согласуется с определением (2). В самом деле, предложения с одинаковыми переменными равносильны тогда и только тогда, когда множества их истинности совпадают (этот факт отмечается в учебнике «Алгебра 7»); следовательно, уравнения, равносильные в смысле определения (3), будут равносильными и в смысле определения (2). (Строго говоря, в определение (3) нужно было бы еще добавить, что для переменных в обоих уравнениях фиксирован один и тот же порядок, поскольку равносильные в смысле определения (2) уравнения с одними и теми же переменными при различном их порядке могут иметь различные множество решений; так, например, пара (1, 2) будет решением уравнения $x + 3y = 5$, если первой переменной считать y, и не будет решением того же уравнения, если первой переменной считать x. Однако обычно договариваются о едином, например, алфавитном, порядке переменных для всех предложений в данном контексте и оговорка о порядке переменных в каждом отдельном случае становится излишней.)

При рассмотрении систем и совокупностей уравнений знак равносильности ($\Leftrightarrow$) появляется между уравнением и совокупностью уравнений, между системой уравнений и их совокупностью, между системой уравнений и смешанной системой уравнений и неравенств, т. е. между такими объектами, для которых отношение равносильности не было определено. Как же быть? Давать каждый раз по мере необходимости новые определения? Очевидно, это очень загромоздило бы изложение курса, и без того перегруженного.

Наиболее приемлемым выходом из этого положения представляется принятие следующих общих определений:

Система уравнений (неравенств, уравнений и неравенств) есть сложное предложение, составленное из них с помощью союза «и» (конъюнкция).

Совокупность уравнений (неравенств, уравнений и неравенств) есть сложное предложение, составленное из них с помощью союза «или» (дизъюнкция).

Системы и совокупности, в свою очередь, могут быть составными частями конъюнкций или дизъюнкций.

Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда каждое из составляющих ее предложений истинно. Дизъюнкция истинна тогда и только тогда, когда хотя бы одно из составляющих ее предложений истинно.

Встав на такую точку зрения, естественно принять общее определение решения для уравнений, неравенств, их систем и совокупностей: «Решением предложения с переменными называется такой упорядоченный набор значений переменных, при подстановке которых вместо переменных предложение становится истинным высказыванием». Отсюда и из определения системы как конъюнкции, а совокупности как дизъюнкции вытекает, что решением системы является набор значений переменных, обращающих *каждое* уравнение системы в истинное высказывание, а решением совокупности является набор значений переменных, обращающий *хотя бы одно* из предложений совокупности в истинное высказывание; множество решений системы уравнений или неравенств с одними и теми же переменными есть *пересечение* множеств решений предложений, составляющих систему; множество решений совокупности уравнений или неравенств с одними и теми же переменными есть *объединение* множеств решений предложений, составляющих совокупность. (Если ввести в школьный курс термины и понятия «конъюнкция» и «дизъюнкция», то можно было бы вообще отказаться от терминов «система» и «совокупность».

Кстати говоря, в современных школьных учебниках термин «совокупность» не употребляется, что создает неудобства и затруднения в обращении с соответствующим «безымянным» понятием.)

Единый подход к системам и совокупностям как видам предложений позволяет применить к ним общее определение: «Два предложения с одними и теми же переменными называются равносильными, если множества их решений (множества истинности) совпадают. Это избавляет от необходимости вводить несколько специальных определений; при таком подходе утверждения о равносильности уравнений, неравенств, систем уравнений, систем неравенств, совокупностей уравнений, совокупностей неравенств, смешанных систем и совокупностей в любом их сочетании становятся вполне корректными.

Заметим, что подход к системам и совокупностям уравнений и неравенств как к предложениям предусмотрен в пособии для учителей «Сборник задач по алгебре и началам анализа» для IX—X классов Б. М. Ивлева, А. Н. Землякова и др. (М., Просвещение, 1978).

* * *

Вопросы, затронутые в статье, весьма разнохарактерны; объединяет их лишь то, что все они относятся к числу трудных или неясных с логической точки зрения вопросов школьного курса «Алгебра и начала анализа».

Трудности, связанные с употреблением кванторов, коренятся в самой природе математического анализа, обусловливающей сложность логической структуры языковых выражений его понятий и результатов. К чисто языковым трудностям относится смешение понятий «нечетная функция» и «не четная функция» и т. п.; сюда же можно отнести трудности обращения с терминами («необходимое условие», «достаточное условие». Трудности такого рода должны преодолеваться с помощью учителя, использующего для этой цели специальные методические приемы.

Ф. М. Барчунова

НЕКОТОРЫЕ ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ

Урок не может быть эффективным, если в его проведении нет активной деятельности каждого ученика. Развитие познавательной активности школьника, упорства в самостоятельном нахождении ответа на возникающие в процессе работы вопросы — все это большая забота учителя.

Высокий теоретический уровень преподавания в соединении с доступностью изложения, индивидуальный подход в обучении, большой удельный вес самостоятельной работы учащихся в получении знаний, широкое применение технических средств обучения — все это необходимые факторы в деле достижения высокой эффективности урока. Этот перечень можно продолжить.

В данной статье мы рассмотрим два направления в работе учителя, способствующие развитию интереса школьников к обучению: пропедевтическую линию в построении обучения и включение элементов самообразования ученика в учебный процесс.

Пропедевтика изучения материала призвана, с одной стороны, предупредить возможные затруднения в работе ученика над тем или иным вопросом и, с другой стороны, показать ему перспективу изучения данного материала. Для успешного осуществления этой линии учителю важно не только хорошо знать весь последующий материал и внутрипредметные связи, но и четко представлять, что может оказаться трудным для ученика и почему.

Чтобы тот или иной вопрос, задачу назвать трудными, имеется много факторов.

Однако несомненно, что если у ученика нет прочного фундамента, на котором строится некоторый материал, то этот материал окажется трудным для ученика. Речь идет не только о наличии знаний, необходимых для понимания учеником данного вопроса или решения предложенной задачи. Ученик должен владеть еще суммой различных способов, подходов к их разрешению, по возможности наиболее рациональных. Рациональный способ предполагает рассмотрение различных способов решения с анализом их, что, безусловно, трудно во времени. Однако препедевтическая линия в изучении материала позволяет часто скомпенсировать потерю времени.

На протяжении изучения алгебры с VI по X класс многие вопросы рассматриваются в каждом классе, безусловно, на разных уровнях. Они пополняются, развиваются и находят свое завершение в старших классах. Казалось бы, что при многократном возвращении к этим вопросам они в IX и X классах должны проходить легко. Однако это не всегда бывает так. Так, например, расширение понятия числа идет постепенно и фактически к VII классу заканчивается. Материал этот повторяется без увеличения объема в IX и X классах. И все же здесь он идет с трудом и на многие подчас элементарные вопросы, связанные с действительными числами, учащиеся, оканчивающие среднюю школу, ответить на могут. Одной из причин этого, на наш взгляд, является отсутствие пропедевтики в изучении этого материала.

На вступительных экзаменах в одном из институтов Москвы в 1978 г. было предложено доказать, что $\operatorname{tg} 1^\circ$ — число иррациональное. Для многих абитуриентов это задание оказалось непосильным, хотя оно не выходит за рамки школьной программы. Материал, необходимый для доказательства (формула

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \text{ и } \operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \text{т. е.}$$

число иррациональное), изучался в IX классе, а способ решения относится к VII классу. Трудность у абитуриентов возникла из-за неумения найти способ решения. Большинство абитуриентов совсем не знали, как приступить к доказательству. Это свидетельствует о том, что методу от противного мало уделяют внимания в школе, и он не находится на вооружении учащихся. Но даже те, кто решил применить этот способ, не знали, по какому же пути им двигаться дальше, хотя все рассуждения, которые должны следовать, очень просты.

Совершенно очевидно, что при изучении в VII классе преобразований суммы, произведения, частного дробей в дробь, тождественно им равную, все внимание учителей было обращено на технику преобразований. Это, безусловно, важно, но не менее важно и указать учащимся, что сама возможность получения результата этих действий с рациональными числами в виде дроби дает способ доказательства того, что то или иное число есть число рациональное (или иррациональное). С этой точки зрения иногда следует не просто выполнить предложенное упражнение, но раскрыть какие-то его внутренние возможности, получить дополнительную информацию, показать, где и как можно его использовать в будущем.

В VII классе замкнутость некоторых числовых множеств в отношении тех или иных операций показывается в упражнениях без этой терминологии. Важно не просто выполнить упражнения, а показать, как продолжить подмеченную здесь информацию, указать на возможный способ решения задач типа предложенной на вступительном экзамене. В дальнейшем, в VIII, IX классах, при получении различных формул, в частности $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, следует возвращаться к данному вопросу при рассмотрении их конструкций.

В этом случае учащиеся без труда сами придут к выводу, что если предположить, что $\operatorname{tg}1^\circ$ — число рациональное, то на основании формулы $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, где $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq 0$, можно сделать вывод, что $\operatorname{tg}2^\circ$, $\operatorname{tg}3^\circ$ ... $\operatorname{tg}30^\circ$ — числа рациональные, что неверно, так как $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (здесь ни α, ни β, ни $\alpha+\beta$ не являются углами вида $90^\circ+180^\circ k$; $k\in Z$).

Трудными для понимания учащимися IX класса являются свойства полноты и непрерывности множества действительных чисел. Большинство из учеников не умеют ответить на вопросы по данной теме, даже элементарные. Правда, по-настоящему теория этого вопроса в школе не рассматривается. Просто в процессе выполнения каких-то упражнений делаются некоторые обобщения. Названий этих свойств также в учебнике нет. Мы полагаем, что учитель может пользоваться этими названиями без того, чтобы вводить это в терминологию ученика. Но дело, конечно, не в этом. Важно заранее готовить ученика к пониманию вопроса, а возможностей для этого достаточно. Свойством полноты обладает и множество рациональных чисел и в той или иной степени, об этом говорилось в VII классе при выполнении упражнений. Понятие непрерывности множества действительных чисел появляется только в IX классе. Какая же подготовка к этому должна вестись в предшествующих классах?

В теме «Абсолютная погрешность» в VII классе при выполнении, например, упражнения 564 полезно выписать результаты в таком виде:

$$0<\frac{1}{3}<1$$
$$0,3<\frac{1}{3}<0,4$$
$$0,33<\frac{1}{3}<0,34$$
$$0,333<\frac{1}{3}<0,334$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Затем схематически, т. е. без соблюдения масштаба, изобразить эти промежутки на координатной прямой, получив систему вложенных интервалов. В разговоре о возможности получения приближенных значений числа $\frac{1}{3}$ с любой степенью точности можно сообщить о допущении существования единственной точки координатной прямой, общей всем этим интервалам, которая и изображает число $\frac{1}{3}$.

Такую же работу надо провести при изучении темы «Приближенные значения корня» для какого-либо корня, например для $\sqrt{5}$.

Разговор о точности приближения рациональных и иррациональных чисел десятичными дробями, запись $|x - a| < 0{,}01$ и чтение этой записи различными способами, изображение решения этого неравенства на координатной прямой — все это должно быть направлено на подготовку учащихся к понятию предела последовательности и его геометрической интерпретации.

Не всегда трудности, возникающие у учащихся при изучении того или иного материала, видны явно. В частности, в понимании предела последовательности имеется одна завуалированная трудность. Известно, что учащиеся лучше осваивают какое-то понятие, когда имеется противопоставление. Определение предела последовательности понималось бы учащимися значительно лучше, если бы они смогли сформулировать, что значит, что некоторое число не является пределом последовательности. Однако учащиеся не умеют строить отрицание, тем более сложных предложений*. Сформулировать определение: «Не для любого $\varepsilon > 0$ выполняется данное свойство, т. е. найдется такое $\varepsilon > 0$, что для достаточно больших $n \in N$ будет истинно $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$» (надо только указать какое-либо $\varepsilon > 0$) — учащиеся не могут. Не понимают поэтому они и те упражнения, где требуется доказать, что то или иное число не является пределом заданной последовательности. Необходимо поработать над построением определения предела последовательности. Прежде всего в нем надо выделить свойство числа a, затем подчеркнуть, что оно должно выполняться для любого $\varepsilon > 0$. Далее выяснить, что́ значит, что оно выполняется не для любых $\varepsilon > 0$, сформулировав в форме: «Найдется такое $\varepsilon > 0$, для которого выделенное свойство не выполняется».

Однако не с этого должна начинаться работа над отрицанием. Построение отрицаний предложений действительно трудно, если не обучать этому постепенно, начиная с младших классов. В IV—VI классах учащимся достаточно просто уметь приводить контрпримеры. В VII—X желательно хотя бы в некоторых случаях просить формулировать отрицание предложений. Например, что значит, что равенство не является тождеством, что функция не возрастает, что число π не является периодом для функции sin и т. д. Более внимательно остановиться на утверждении того, что некоторое число не является пределом последовательности. Если предварительная работа велась, то учащиеся сами скажут, что это утверждение равносильно тому, что существует $\varepsilon > 0$, не обладающее свойством, указанным в определении предела последовательности. Здесь полезно показать и геометрическую интерпретацию этого случая.

---

* Научное изложение вопроса об отрицании предложений смотри в статье И. Л. Никольской в данном сборнике.

Работа по построению отрицаний поможет и пониманию определения предела функции на «δ — ε»-языке. Здесь при построении отрицания тоже переход «от любого $\varepsilon > 0$, обладающего заданным свойством», к «существованию $\varepsilon > 0$, не обладающего им».

При выполнении упражнения на доказательство того, что в некоторых точках функция не имеет предела, у учащихся имеется и еще одна трудность — применение метода полной индукции к бесконечному множеству. Этим методом учащиеся пользовались в VIII классе при доказательстве того, что $a^x > 0$, при $a > 0$ и $x \in \boldsymbol{Z}$, не давая ему названия, а также и в курсе геометрии. Здесь учащиеся должны усвоить, что при доказательстве этим методом проверка выполнения некоторого свойства делается на каждом из подмножеств, на которые разбивается данное бесконечное множество.

В упражнениях на доказательство того, что в целочисленных точках функция $f(x) = [x]$ не имеет предела, надо доказать, что ни одно действительное число не может быть пределом этой функции. Применяя метод полной индукции, множество R необходимо разбить на подмножества, но как? Здесь очень важно предварительное рассмотрение тех значений, которые функция принимает слева и справа от заданной точки, определить их полусумму — число n и сделать разбиение множества R на подмножества чисел, больших n $(a > n)$ и не больших n $(a \leqslant n)$. Дальше уже проверка идет на каждом из этих подмножеств. Показывается существование такого $\varepsilon > 0 \left(\varepsilon = \frac{1}{4}\right)$, для которого на каждом из подмножеств $|[x_n] - a| \geqslant \varepsilon$, т. е. не выполняется условие для того, чтобы число a было пределом функции $f(x) = [x]$.

Несколько другое доказательство приведено в статьях Е. Г. Будникова («МШ», 1977, № 3, с. 31) и М. Л. Галицкого («МШ», 1978, № 3, с. 40).

Приведем еще пример, где четко прослеживается важность пропедевтической линии. Определение функции, возрастающей и убывающей на множестве, дается в VII классе, и учащиеся там выполняют некоторые упражнения на исследование функции на монотонность с помощью определения. В IX классе этот материал повторяется. Здесь четко проводится запись промежутков монотонности функций на основании определения понятия функции, возрастающей и убывающей на множестве. Учащиеся должны безошибочно записывать эти промежутки, используя график функции и делая соответствующие обоснования. Важно, чтобы они уяснили, что точка, в которой функция непрерывна, принадлежит и промежутку возрастания, и промежутку убывания, если в ней происходит изменение характера монотонности, и сумели это обосновать. Упражнений на этот материал имеется достаточно.

В дальнейшем при изучении темы «Возрастание и убывание функции» учащиеся применяют к исследованию функции на монотонность производную. Естественно новый аппарат исследования не может сказаться на поведении функции. Однако часто учащихся смущает то обстоятельство, что в теореме о достаточном условии возрастания (убывания) функции говорится о поведении ее на интервале. Поэтому даже в ситуациях, хорошо знакомых учащимся из VII класса, они начинают сомневаться в том, присоединять ли концевые точки промежутка, например точки экстремума, к промежутку возрастания (убывания), тем более к обоим промежуткам.

Учителю следует разъяснить учащимся, что в теореме речь идет об интервале потому, что в концевых точках производная может не существовать или быть равной нулю. Для случая, когда функция монотонна на интервале $]a; b[$ и непрерывна в точках a и b, она монотонна на отрезке $[a; b]$. Это относится и к числовым лучам. Например, функция $f(x) = x^2$ возрастает на $]0; \infty[$ и непрерывна в точке 0; следовательно, можно присоединить эту точку 0 к промежутку возрастания, т. е. функция возрастает на $[0; \infty[$.

Имеются случаи, когда функция, будучи определенной в некоторой точке, не является в ней непрерывной, и все же эта точка входит в промежуток монотонности. Например, функции $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = x^2$, $D(g) = [0; \infty[$ определены в точке 0, обе не являются в ней непрерывными, однако обе возрастают на всей области их определения, т. е. на $[0; \infty[$ на основании определения возрастающей функции. Конечно, заключение на основании определения требует аналитического доказательства, что трудно для учащихся, а главное, требует много времени. Поэтому вывод делается на наглядно-интуитивной основе с использованием графика и некоторых рассуждений.

Когда речь идет о пропедевтике обучения, то в тесной связи с ней стоит вопрос о создании у учащихся необходимой базы для восприятия каждого конкретного материала. Нельзя считать, что эта база создается непосредственно на даваемом уроке или ему предшествующих, хотя это, вообще говоря, не исключается. Очень полезно, если она закладывается значительно раньше и воспроизводится на уроке, например в процессе устных упражнений в начале урока или в процессе изучения нового материала. Здесь вопросы обсуждаются коллективно, причем предполагается активное обращение к памяти учащихся. Это активизирует работу класса, позволяет ученикам лучше понять и усвоить материал.

Покажем это на примере изучения темы «Первообразная функции».

Сформулируем те вопросы, которые учащиеся должны представлять, а затем и знать при введении понятия «первообразная»:

1. Операция дифференцирования функции f ставит ей в соответствие некоторую другую функцию f' — ее производную. Это отношение однозначно. (Таблицу рассмотренных производных функций и теоремы дифференцирования учащиеся должны знать.)

2. Существует операция, обратная по отношению к дифференцированию. Она как бы восстанавливает ту функцию, производная

которой дана. В частности, с ее помощью решается вопрос о нахождении закона изменения скорости и координаты точки $S(t)$, движущейся по прямой, если известен закон, которому подчиняется ускорение.

3. Таблицу, сходную таблице производных, для обратного отношения можно получить из таблицы производных, если элементы поменять местами.

4. Новая операция неоднозначна; в таблице это должно найти отражение: к каждой полученной функции надо прибавить постоянное слагаемое C.

5. Способ проверки правильности составления таблицы — дифференцирование полученных функций.

Все эти вопросы можно поставить перед учащимися еще в теме «Производная функции». Это не только поможет усвоению темы «Первообразная», но и позволит учащимся лучше понять изучаемый материал о производной, не создавая при этом перегрузки их материалом.

Разговор о двух операциях может проходить при стрелочном задании отношения. Это наглядно и понятно учащимся. Рассматривая вопрос о скорости и ускорении точки, движущейся прямолинейно, для которой координата изменяется во времени по некоторому данному закону, полезно сформулировать обратную задачу, основную задачу механики, отнеся ее решение на будущее. Учащиеся позже должны будут вспомнить о сформулированной проблеме.

Используя в упражнениях таблицу производных, можно ставить вопрос о нахождении по производной той функции, для которой она получена. Конечно, это следует делать на самых простых примерах, где «угадывается» функция, например для степенных функций. Но давать «готовые функции» для проверки можно и несколько потруднее, так как здесь основное — усвоить способ проверки. Выполняя с учащимися упражнения такого рода, следует ставить вопрос, нет ли еще функции, кроме «угаданной», для которой заданная функция является производной. Например, учащиеся сначала угадали, затем проверили, что 1 есть производная функции $f(x) = x$. Им нетрудно догадаться, что это справедливо и для функций, например, $g(x) = x - 1$, $h(x) = x + \sqrt{2}$ и т. д.

После того как эти функции будут выписаны на доске, ученики подметят, что они имеют один и тот же вид, а именно отличаются на постоянное слагаемое. Все это нужно для понимания основного свойства первообразной.

Самое главное, что при введении определения первообразной весь этот материал будет выступать не как новый, а как знакомый, хотя возможно и несколько забытый. Однако напряжение памяти в процессе повторения очень полезно. Материал, восстановленный в памяти, усваивается лучше, чем тот, который дается впервые. Кроме того, в этой теме еще остается достаточное количество тонкостей, над которыми надо поработать. Безусловно, внимательно надо поработать над определением первообразной, над основным ее свойством, выполнить достаточное количество упражнений. Поэтому подготовка к изучению этой темы при изучении производной высвободит время для более тщательной работы над новым материалом. Можно с уверенностью сказать, что изучение обеих тем — «Производная» и «Первообразная» — пройдет с большим интересом у учащихся, а следовательно, и с большей отдачей.

Примеров на осуществление пропедевтической линии в обучении можно привести сколько угодно, так как, по сути дела, эта линия должна вестись при прохождении любой темы. Ведь каждый материал обладает и более широким назначением. Важно не только овладеть его содержанием, но и видеть его применение в будущем. Протянув ниточку в будущее, надо только следить, чтобы она не разорвалась.

Нельзя думать, что основную роль в решении этого вопроса играет теория. В большинстве упражнений содержится огромный резерв. Можно сказать, что большую часть информации наши ученики получают через упражнения. Учителю необходимо заранее вскрыть внутренние резервы каждого упражнения, для чего необходимо предварительно проанализировать и решить их. В случае необходимости можно несколько изменить какие-либо данные, чтобы на основании выполнения нескольких упражнений сделать какие-то предположения или выводы.

Рассмотрим, например, упражнения темы IX класса «Приращение функций». В их задании предлагается фактически сделать вычисления, но рассматривать их как вычислительные упражнения нельзя. Анализируя результаты, надо сделать вывод о характере изменения функций, линейной и квадратичной, сравнивая их. Если приращения для первой функции не зависят от выбора точки, в которой мы ищем приращение, а зависят только от приращения аргумента, то у квадратичной функции это не так. Линейная функция изменяется равномерно. Квадратичная же медленно изменяется вблизи 0, а дальше изменяется все быстрее и быстрее по мере удаления точек от 0. Надо это «увидеть» и на графике. Проверить это надо и для обратной пропорциональности в следующем упражнении. Сама последовательность упражнений показывает алгоритм нахождения отношения приращения функции к отношению аргумента, что очень важно для темы «Производная». На этом тоже надо сделать акцент. Таким образом через выполнение этих упражнений учащиеся получают много важной информации, необходимой при изучении следующего материала.

Второй вопрос, на котором, как это уже указывалось, мы останавливаемся, — это включение элементов самообразования учащихся в учебный процесс. Этот вопрос тем более важный, что никакой классный коллектив не может быть однородным ни по способностям, ни по знаниям, ни по отношению к работе.

Что мы понимаем под включением элементов самообразования ученика? Во-первых, эта работа по самостоятельному изучению по учебнику нового материала в процессе классной или домашней работы. Во-вторых, это умение самостоятельно найти материал в учебниках, по которому у ученика имеются пробелы, и разобраться в нем. И наконец, в третьих, это умение самостоятельно найти литературу и разобраться в материале по интересующему ученика вопросу, не входящему в школьную программу. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Если вопрос самостоятельной работы с учебником систематически решается еще с младших классов, то в IX—X классах он уже не представляет трудности. К этому времени учащиеся уже не нуждаются в специальных инструкциях, умеют разбить тему на отдельные части, выделив в них главное. Однако полностью исключить инструктаж еще нельзя. Это касается в основном трудных или недостаточно четко изложенных в учебнике тем. Это не значит, что учащиеся не справятся самостоятельно с этим материалом. Просто для этого им понадобится много времени, которого у них недостаточно.

Иногда полагают, что такие темы не следует предлагать учащимся для самостоятельной работы. Нам кажется, что это не так. То, что изучено самостоятельно, да еще с преодолением каких-то трудностей, всегда интересно и лучше запоминается. Инструктаж, который должен быть дан учащимся, это не последовательность команд и даже не план работы. В нем должна быть система заданий, подводящих к пониманию наиболее трудного из текста. Покажем это на примере изучения п. 26 «Критические точки функции, ее максимумы и минимумы»*. При его изучении следует учесть, что понятия возрастания и убывания функции в точке в школе не рассматривается (см. статью «О нормализации нагрузки учащихся», «МШ», 1978, № 3), поэтому теорема Ферма предлагается без доказательства. Тем не менее материал пункта насыщен трудными определениями и понятиями и требует большого напряжения при его изучении. Большое значение при работе над этим материалом имеет, с нашей точки зрения, создание представления о понятии, о содержании теоремы сначала на наглядной основе. Таким образом, формулировка должна появиться после того, как представление о содержании, в ней заключающемся, уже создано. Покажем, как можно построить самостоятельное изучение этого материала учащимися.

Часть работы над темой перенесена в домашнее задание к первому уроку. Учащиеся должны усвоить понятия критических точек и точек экстремума. В том случае, когда такая работа предлагается на дом, приходится вопросы и задания для самостоятельной работы давать учащимся в отпечатанном (или написанном под копирку) виде. Вот их содержание:

---

* Алгебра и начала анализа / Под ред. А. Н. Колмогорова. Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы. М., Просвещение, 1980.

1. Какие точки называются критическими для функций?

2. Выполните в тетради рисунок 53 учебного пособия.

3. Укажите точки, в которых меняется характер монотонности функции.

4. Проведите касательные к кривой в указанных вами точках. Как расположены касательные?

5. Отметьте какую-либо δ-окрестность точки x_1. Сравните значения функции $f(x)$ для любой точки x этой окрестности со значением $f(x_1)$. Запишите это.

6. Прочтите определение точки минимума функции на с. 82. Выучите его. Умейте дать иллюстрации.

7. Какая из отмеченных вами точек тоже является точкой минимума? Докажите это.

8. Отметьте какую-либо δ-окрестность точки x_2. Сравните значения функции $f(x)$ для любой точки x этой окрестности со значением $f(x_2)$. Запишите это.

9. Прочтите определение точки максимума функции на с. 82. Выучите его. Умейте дать иллюстрации.

10. Какие точки называются точками экстремума функции?

11. Почему точки a и b не являются точками экстремума?

12. Отметьте произвольную точку из области определения функции, отличную от указанных вами, и проверьте, является ли она экстремальной.

Кроме этого, учащиеся должны были повторить без доказательства авторский пример 5 из п. 18.

На уроке, посвященном этой теме, в процессе проведения устных упражнений по заготовленному рисунку (рис. 1) было проверено понимание изученного материала и проведена некоторая подготовка к самостоятельному изучению материала в классе. Были рассмотрены следующие вопросы:

1. Какие точки называются критическими для функции? Назовите их по рисунку.

2. Докажите, что точка x_1 есть точка экстремума.

3. Докажите, что точка x_2 есть точка минимума.

4. Почему точки a и b не являются экстремальными?

5. Для каких экстремальных точек не существует касательных к графику?

6. Расскажите по рисунку, на каких промежутках производная меняет знак с «+» на «—». Какую экстремальную точку включает этот промежуток?

7. Назовите какой-либо промежуток, включающий точку минимума. Как проходит смена знака производной при переходе через эту точку?

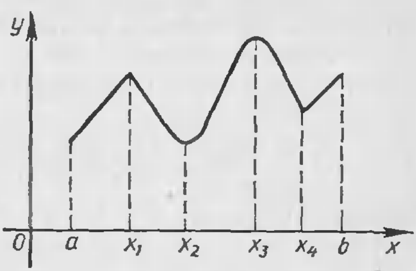


Рис. 1

Затем учащимся предлагается самостоятельное изучение материала пункта, начиная с теоремы Ферма (без доказательства). На доске заранее записываются вопросы и задания к их работе:

1. Какое условие, необходимое или достаточное, для того чтобы точка была экстремальной, сформулировано в теореме Ферма?

2. Докажите, что это условие не является достаточным.

3. Какое заключение можно сделать о поведении функции в критической точке, в которой функция не имеет производной? Приведите примеры.

4. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума функции.

5. При доказательстве теоремы 2 объясните, почему на интервале $]a; x_0[$ функция возрастает, на интервале $]x_0; b[$ — убывает и почему для всех $x \in]a; b[$ и $x \neq x_0$ $f(x_0) > f(x)$.

6. Докажите теорему 3, сделав аналогичные пояснения.

7. Выучите упрощенные формулировки теорем 2 и 3. Проиллюстрируйте на примерах.

По изученному материалу проводится беседа, после чего выполняются упражнения. Поскольку в тексте пункта нет показа сформления записи выполнения упражнений, они выполняются параллельно с доской. Запись может быть следующей:

№ 320 а) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x;$

$$f'(x) = x - 3; \quad 1)\ D(f') = R; \quad 2)\ f'(x) = 0;$$
$$x - 3 = 0; \ x = 3.$$

Критическая точка: 3.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2) < 0 \\ f'(4) > 0 \end{array}\right| x = 3 \text{ — точка минимума}$$

Можно последнюю запись провести и так:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Если } x < 3, \text{ то } f'(x) < 0 \\ \text{Если } x > 3, \text{ то } f'(x) > 0 \end{array}\right| x = 3 \text{ — точка минимума}$$

При выполнении этого упражнения необходимо отметить с учащимися, что на все вопросы задания можно было ответить и без использования производной, так как функция квадратичная. Однако это мы можем сделать не для любой функции, тогда как производная позволяет провести исследование для любой дифференцируемой функции. Это можно показать на примере № 322 а):

$$u(x) = 3x^4 - 4x^3; \ u'(x) = 12x^3 - 12x^2;$$
$$1)\ D(u') = R; \ 2)\ u'(x) = 0; \ 12x^2(x - 1) = 0;$$
$$x = 0 \text{ или } x = 1.$$

Критические точки: 0 и 1.

$$\left.\begin{array}{l} u(-1) < 0 \\ u\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \\ u(2) > 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} x = 0 \text{ не является точкой экстремума} \\ \\ x = 1 \text{ — точка минимума} \end{array}$$

Можно последнюю запись провести и так:

Если $x < 0$, то $u'(x) < 0$	$x = 0$ не является точкой экстремума
Если $0 < x < 1$, то $u'(x) < 0$	
Если $x > 1$, то $u'(x) > 0$	$x = 1$ — точка минимума

При наличии времени полезно набросать схематически график функции.

На втором уроке, посвященном этой теме, материал закрепляется в процессе упражнений из учебного пособия. Работа в основном может проводиться и без использования доски, но с обязательной проверкой выполнения с помощью переносных досок или каких-либо технических средств обучения. Помощь учителя в процессе проведения такой работы тем учащимся, которые в ней нуждаются, обязательна.

Если до IX класса работа по самостоятельному изучению материала по учебнику не проводилась, то не поздно эту работу начать и здесь. План работы ученика, аналогичный приведенному выше, должен быть заранее заготовлен на доске. В случае необходимости учитель оказывает помощь ученикам (индивидуальную, а иногда и фронтальную), останавливая в какой-то момент работу учащихся. Чем большее число вопросов будет включено в самостоятельное изучение, тем быстрее учащиеся научатся работать с книгой и отпадет надобность в подробном инструктаже.

Ликвидация пробелов в знаниях учащихся — очень важный и вместе с тем трудный вопрос. Именно пробелы в знаниях являются основной причиной непонимания материала, а отсюда — потери интереса к учению. Одна из трудностей состоит в том, что ученик сам не всегда может определить, какие именно вопросы в его знаниях упущены, и найти соответствующую литературу, которая помогла бы ему ликвидировать пробелы. Очень страшно, когда пробелы накапливаются.

Для решения этой задачи полезно составить вместе с учеником (а иногда и без него) план его индивидуальной работы, с указанием литературы и соответствующих упражнений. В зависимости от сбъема пробелов (а он может быть в случае болезни ученика или других причин достаточно велик) выполнение этого плана может проходить на уроках и дома параллельно с изучаемым текущим материалом или отдельно. В последнем случае работа ученика в классе не согласуется с работой остальных учащихся, но в какой-то момент он должен догнать класс и работать уже вместе с ним. Безусловно, группа учащихся, работающая по индивидуальным планам, требует к себе большого внимания учителя. К ней можно подключать и сильных учащихся. Но очень важно, чтобы работа носила характер самостоятельной работы с литературой, в данном случае с учебником.

Конечно, составление индивидуальных планов для учеников — это большая нагрузка для учителя, но она окупается сторицей.

Не меньшую заботу должны вызывать у учителя и те ученики, которые хотят знать больше, чем можно почерпнуть из учебника.

Дело здесь, конечно, не только в составлении списков книг для внеклассного чтения. В большинстве случаев эти учащиеся — постоянные посетители библиотек, они много читают, умеют пользоваться каталогом и услугами информационных бюро. Очень важно использовать знания и умения таких учащихся для повышения общей математической культуры класса. Другими словами, важно привлечь их к работе под девизом: «Знаешь сам — научи другого». Такие учащиеся могут готовить сообщения и доклады на различные темы. Доклады они могут делать в процессе внеклассной работы (в кружке, на конференциях, в математических газетах), а сообщения — на уроках. Вкрапление сообщений учащихся в различные стадии урока (самостоятельная работа с учебником, рассказ учителя и др.) оживляет урок и, конечно, очень полезно и для выступающего ученика, и для всего класса. В новой программе много вопросов, которые даются только в ознакомительном плане. Это очень удобный материал для сообщений учащихся на уроках. Сообщения не должны быть большими, они должны быть тщательно подготовлены и по необходимости иллюстрированы (рисунками, кодопозитивами, кинофильмами и т. д.). Безусловно, материал сообщения должен предварительно проверить учитель.

Некоторые сообщения, в частности различные исторические справки, могут поручаться любому ученику. Это очень полезно, так как увеличивает число работающих с внешкольной литературой.

По возможности учитель должен планировать и работу с сильными. Такой план не должен вырывать последних из общей работы класса: сильный ученик должен работать не по опережающему плану, а по углубленному. Его можно привлечь к доказательству тех теорем, которые не являются обязательными, к выполнению более трудных упражнений, в дополнение к предназначенным для всего класса. В какие-то моменты такие учащиеся помогают учителю в организации помощи нуждающимся в ней товарищам, являются ассистентами при проведении практических работ. Все это позволит сделать урок более полноценным и интересным.

Л. О. Денищева

О ВЗАИМОСВЯЗИ КУРСА АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА С КУРСОМ ГЕОМЕТРИИ

Одним из направлений совершенствования методики преподавания математики является осуществление внутрипредметных связей курса математики (геометрии и алгебры и начал анализа). Реализация внутрипредметных связей может проходить в различных направлениях. Например, согласованное формирование одних и тех же понятий способствует более глубокому и сознательному их усвоению, создает благоприятные условия для ликвидации формализма в знаниях учащихся. Применение методов и приемов работы, сформированных в одном учебном предмете, к решению теоретических и практических задач по другому предмету способствует развитию умственных способностей учащихся, в частности их математических способностей. На это при обучении математике важно обращать внимание учащихся и раскрывать перед ними некоторые универсальные методы и приемы. Умение самими учащимися выполнять такой перенос является показателем их математического развития. Кроме того, осуществление взаимосвязи курсов математики поможет избежать ненужного дублирования некоторых вопросов, что позволит сэкономить время на изучение учебного материала.

Программа школьного курса математики позволяет выявить некоторые вопросы курса алгебры и начал анализа и курса геометрии, которые служат осуществлению взаимосвязи данных учебных предметов. Эти вопросы приведены в таблице (см. с. 78).

I. **Понятие функции.** Одним из основных понятий, которое формируется в курсе восьмилетней школы и получает дальнейшее развитие в курсе алгебры и начал анализа, является понятие функции.

Напомним, что в курсе восьмилетней школы дается определение функции как отношения между элементами двух множеств, при котором каждому элементу первого множества соответствует не более одного элемента второго множества. При этом никаких требований на природу элементов этих двух множеств не налагается. Сформулированное определение иллюстрируется различными примерами, в том числе и примерами отображений фигуры

Алгебра и начала анализа	Геометрия
Числовые функции	Отображение фигуры на фигуру. Преобразование пространства
Координаты вектора	Разложение вектора по трем некомпланарным векторам
Графики гармонических колебаний	Координатные формулы преобразований*
Интеграл	Объем пирамиды. Объем фигуры, полученной при вращении криволинейной трапеции. Объем конуса, шара
Система линейных уравнений	Взаимное расположение прямых и плоскостей

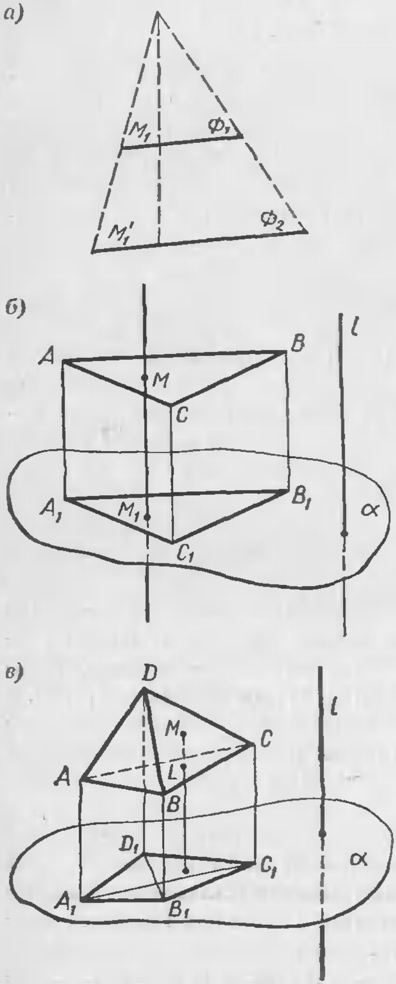


Рис. 1

на фигуру (рис. 1). В результате введения такого определения функции большинство учащихся в VI классе умеют привести различные (в том числе и «геометрические») примеры функций.

В дальнейшем в процессе обучения алгебре основное внимание учащихся сосредоточивается на изучении числовых функций. С VI по VIII класс ученики узнают большинство элементарных функций: прямую пропорциональность, обратную пропорциональность, квадратичную, показательную и логарифмическую функции. Но к моменту изучения числовых функций в курсе алгебры и начал анализа в IX классе они могут основательно забыть о существовании общего понятия функции.

На уроках алгебры и начал анализа в IX классе естественно внимание учащихся снова обращается на числовые функции: повторяется определение числовой функции, рассматриваются примеры числовых функций, решаются задачи на нахождение их области определения и области значений. С этими задачами уча-

* В 1979/80 учебном году этот вопрос исключен из учебного плана. Рекомендуемые материалы могут быть использованы учителем для работы в кружке или на факультативе.

щиеся справляются. Однако многие школьники затрудняются привести примеры функций, которые не являются числовыми. Это свидетельствует о недостаточно полном владении понятиями «функция», «числовая функция», о неумении выделять видовые признаки числовой функции.

По-видимому, при введении понятия «числовая функция» в IX классе работа учителя должна проводиться в основном в двух направлениях. Во-первых, ему нужно убедиться в том, что учащиеся помнят определение функции, которое введено в VI классе как особый вид отношения между элементами двух множеств; умеют среди различного рода отношений распознавать те, которые являются функциями; кроме того, могут самостоятельно привести примеры отношений, являющихся функциями.

В процессе такой работы будут естественно устанавливаться связи с курсом геометрии IX класса. Тем более, что изучение темы «Числовые функции» проходит примерно в то же время, когда в геометрии рассматриваются понятия «отображение фигуры на фигуру» и «преобразование пространства», т. е. фактически вопросы, непосредственно связанные с развитием понятия функции. При этом на уроках геометрии полезно обратить внимание учащихся на то, что отображения (например, на рис. 1, *б*, рис. 1, *в*) являются функциями; установить, какие множества представляют собой область определения, область значений этих функций; обратимы ли эти отображения. Например, изучая § 14 «Отображение фигуры. Преобразование пространства», важно подчеркнуть для учащихся, что рассматриваемое здесь проектирование тетраэдра $ABCD$ на плоскость α параллельно прямой l (рис. 1, *в*) является функцией, так как каждому элементу первого множества (каждой точке тетраэдра $ABCD$) соответствует не более одного элемента второго множества (множества точек плоскости α). Областью определения этой функции является множество точек тетраэдра $ABCD$, областью значений — множество точек четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$. Данная функция необратима, так как обратное отношение не является функцией: существуют элементы, например точка M_1, которым соответствует более одного элемента (например, точки M и L).

При рассмотрении в курсе геометрии IX класса операции вычитания векторов (§ 19, «Геометрия 9») вводится понятие «противоположный вектор». Изучение этих вопросов также имеет прямое отношение к работе над понятием «функция». Напоминая учащимся определение вектора (параллельного переноса), полезно еще раз обратить их внимание на то, что каждой точке M пространства ставится в соответствие единственная точка M_1 этого же пространства, т. е. фактически вектор определяет некоторую функцию. Причем она обратима, так как обратное соответствие также является функцией: каждой точке M_1 обратная функция ставит в соответствие ту точку M, образом которой является M_1, т. е. ее прообраз. В данном случае обратная функция называется противоположным вектором.

Запас простых и наглядных геометрических примеров, а также осознанное применение учащимися «функционального языка» помогают более глубокому усвоению важных вопросов алгебры. Например, знание учащимися того факта, что вектор — функция, причем такая функция, которая имеет обратную, учитель может использовать при разъяснении свойств взаимно обратных функций. В X классе при выводе формулы для нахождения производной обратной функции рассматривается свойство композиции двух взаимно обратных функций (f и g), а именно $f(g(x)) = x$. Это свойство очень наглядно иллюстрируется хорошо знакомым учащимся геометрическим примером $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, т. е. сумма вектора и ему противоположного вектора дает тождественное преобразование.

Таким образом, рассмотрение самых простых вопросов из курса алгебры, связанных с изучаемым в геометрии материалом, позволяет напомнить учащимся важные алгебраические понятия («функция», «обратимая функция» и т. п.), а также помогает при изложении нового теоретического материала.

Другим направлением является работа учителя над самим понятием «числовая функция». При этом для учащихся важно выделить и сформулировать видовой признак числовой функции, а именно: области определения и значений — числовые множества.

Проверку усвоения рассматриваемого понятия полезно проводить не только тем, что ученик воспроизводит требуемое определение, но и выполнением простейших упражнений типа: «Среди множества заданных функций укажите числовые», «Приведите примеры числовых функций» и т. п.

Нужно также иметь в виду, что для формирования какого-либо понятия важно привести не только примеры, которые подходят под данное понятие, но и контрпримеры.

В качестве примеров нечисловых функций можно также использовать различные отображения фигуры на фигуру. Рассматривая, например, отображение фигуры Φ_1 на фигуру Φ_2 (рис. 1), учитель обращает внимание учащихся на то, что область определения и область значений этой функции являются множествами точек плоскости, а не числовыми множествами, подчеркивая тем самым, какие видовые признаки не имеют места. В данном случае оба множества (и область определения, и область значений) не являются числовыми.

С учащимися можно разобрать и такие примеры, в которых одно из множеств является числовым, а другое — нет:

каждой квадрируемой фигуре ставится в соответствие неотрицательное число — площадь этой фигуры;

каждому действительному числу ставится в соответствие точка координатной прямой;

каждой точке координатной прямой ставится в соответствие ее расстояние от начала отсчета;

каждой паре векторов ставится в соответствие число— их скалярное произведение;

каждому действительному числу t ставится в соответствие точка P_t единичной окружности, которая является образом точки P_0 при повороте R_O^t, и т. п.

II. **Координаты вектора.** Еще одним из вопросов, требующим внимания к взаимосвязи курсов «Геометрия 9—10» и «Алгебра и начала анализа 9—10», является вопрос о координатах вектора.

В курсе алгебры и начал анализа IX класса координаты вектора рассматриваются как координаты конца этого вектора, если вектор отложен от начала координат, т. е. как координаты точки. При этом считается, что координаты точки введены в восьмилетней школе. В геометрии же координаты вектора определяются как коэффициенты разложения данного вектора по трем некомпланарным векторам (X класс), а координатами точки M называют координаты конца вектора $\overrightarrow{OM}$, где O — начало координат.

При таком изучении одного и того же понятия в двух математических курсах у некоторых учащихся может сложиться впечатление, что в геометрии векторы «геометрические», а в алгебре — «алгебраические». Тем более, что обозначаются они тоже по-разному: $\vec{a} = (a; b)$ — в геометрии и $\vec{a}$ $(a; b)$ — в алгебре. Все это, естественно, ведет к формализму в знаниях учащихся, когда в сознании фиксируется только внешнее, символическое выражение математического факта. Очень ярким и убедительным примером проиллюстрировал Хинчин А. Я. в своей книге «Педагогические статьи» формализм в знаниях учащихся. Он писал, что мы не можем считать, что учеником сознательно усвоен материал, например, по решению систем уравнений, если он решает систему уравнений с переменными x и y, а затрудняется решить эту же систему с переменными k и l.

Так же обстоит дело и в рассматриваемом нами случае с координатами вектора. В сознании некоторых учащихся остается чисто внешнее выражение содержания математического понятия через различные определения, а поэтому складывается неправильное представление, что в алгебре рассматриваются «свои» векторы, а в геометрии изучают «свои» векторы.

Согласованное введение понятий в курсах школьной математики поможет сознательному усвоению изучаемого материала. По-видимому, при обучении в общеобразовательной школе было бы целесообразно, чтобы общие понятия, изучаемые в различных предметах, вводились и трактовались единым образом.

Но если все-таки создается положение, подобное тому, которое имеет место с координатами вектора, то учителю необходимо на это обратить внимание учащихся и использовать создавшееся положение для того, чтобы повторить с ними схему построения математической теории. Например, при введении понятия координат вектора в курсе геометрии X класса свое объяснение учителю целесообразно предварить некоторыми вступительными замечаниями. При этом необходимо отметить, что при построении курса геометрии каждое новое понятие определяется через основные или ранее введенные, поэтому и координаты вектора нужно определить через ранее изученные понятия. Теорема о разложении вектора по трем некомпланарным векторам позволяет очень естественно и просто ввести координаты вектора как коэффициенты этого разложения. Введение же координат вектора как координат его конца, если вектор отложен от начала координат, требует определить координаты точки пространства, что достаточно трудоемко.

При этом полезно подчеркнуть для учащихся, что возможны различные подходы к изучению одних и тех же вопросов, различные определения одних и тех же понятий. Следует разъяснить учащимся, что приведенные в учебниках определения координат вектора равносильны. Конечно, требовать воспроизведения приводимых здесь учителем рассуждений от учеников не следует.

Таким образом используется возможность поговорить с учащимися о различных подходах к введению одних и тех же понятий. Это обогатит знания учащихся о построении математических теорий, расширит их кругозор, а также будет способствовать развитию математического мышления.

III. **Графики гармонических колебаний и координатные формулы преобразований.** Следующими темами, при изучении которых необходимо усилить внимание к взаимосвязи курсов геометрии и алгебры и начал анализа, являются «Координатные формулы преобразований» и «Графики гармонических колебаний». В X классе на уроках геометрии при изучении координатных формул преобразований рассматривается один из методов получения уравнения образа геометрической фигуры при заданном преобразовании пространства. Этот же метод может быть с успехом применен и в курсе алгебры и начал анализа для получения уравнений образов в рассматриваемых здесь отображениях плоскости на себя. Хотя в учебнике «Алгебра и начала анализа 10» (под ред. А. Н. Колмогорова) при построении графиков гармонических колебаний эти уравнения появляются (например, при преобразовании плоскости, заданном следующим образом: $(x, y) \to (k \cdot x, y)$, уравнением образа графика функции $y = f(x)$ будет $g(x) = f\left(\frac{k}{x}\right)$),но их происхождение остается для большинства учащихся тщательно скрытой тайной. Это приводит к догматизму в преподавании, а также к формализму в знаниях учащихся*.

IV. **Системы линейных уравнений и взаимное расположение прямых и плоскостей.** Осуществление взаимосвязи между двумя математическими дисциплинами может идти не только при формировании родственных понятий или при использовании методов и приемов одного предмета в другом, но и как иллюстрация, модель некоторой теории одной науки средствами другой. При этом естественно возникает потребность: задачи, ставящиеся, например, в ал-

* Подробнее о работе над этой темой см. с. 90—100.

гебре и началах анализа, переводить на «геометрический язык» и полученные результаты интерпретировать на языке исходной задачи. Примером, который дает возможность раскрыть высказанное положение, служит вопрос о решении систем линейных уравнений и их геометрическая иллюстрация. Остановимся на нем немного подробнее.

К моменту изучения систем линейных уравнений в курсе «Алгебра и начала анализа 10» (под ред. А. Н. Колмогорова) учащимся известно достаточно много фактов из курса геометрии (уравнение плоскости; уравнение прямой; необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов; действия над векторами, заданными своими координатами, и т. д.), которые смогли бы облегчить решение многих алгебраических задач. Например, в алгебре («Алгебра и начала анализа 10») при решении вопроса о том, совместна ли система трех линейных уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases}$$

ученику пришлось бы решить эту систему, чтобы ответить на поставленный вопрос. Это положение имеет место тогда, когда ученик пользуется только средствами алгебры. В некоторых случаях «перевод» задачи на «геометрический язык» (пересекаются ли все три плоскости) помог бы справиться с ней средствами геометрии, без предварительного решения системы. Вспомнив о векторах, перпендикулярных плоскостям (соответственно $\vec{n}_i$ $(a_i;\ b_i;\ c_i)$, где $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$, ученик смог бы определить, параллельны ли эти плоскости. Если хотя бы две из них параллельны между собой и различны (в этом случае векторы какой-либо пары коллинеарны), то система несовместна. Для решения этого вопроса ученик может воспользоваться необходимыми и достаточными условиями коллинеарности векторов. В том случае, когда векторы заданы своими координатами, необходимые и достаточные условия коллинеарности векторов ($\vec{a} = k\vec{b}$, где $k \neq 0$) можно переформулировать в координатной форме: чтобы векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы нашлось число $k \neq 0$, такое, что выполняются равенства $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $c_1 = kc_2$, т. е. соответствующие координаты векторов должны быть пропорциональны. Поэтому для решения поставленной задачи нужно проверить пропорциональность соответствующих координат векторов, перпендикулярных плоскостям. Например, для плоскостей α_1 $(a_1x + b_1y + c_1z = d_1)$ и α_2 $(a_2x + b_2y + c_2z = d_2)$ нужно проверить, выполняются ли равенства $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (при условии, что a_2, b_2, c_2 не равны нулю). Тем самым мы установим, параллельны ли плоскости. Естественно, что плоскости будут различны, если, например, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$. При этом достаточно найти одну пару параллельных и различных плоскостей, чтобы утверждать, что система несовместна. В том случае, когда плоскости параллельны и совпадают ($\alpha_1 = \alpha_2$), достаточно проверить коллинеарность векторов, например $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_3$, проводя аналогичные выкладки. Если в результате мы получим, что α_1 и α_3 параллельны и различны, то система несовместна, а если α_1 и α_3 параллельны и совпадают, то система имеет решение.

Например, при решении вопроса о совместности системы

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 4, \\ 7x - 12y + 9z = 5, \\ -0{,}9x + 1{,}2y - 1{,}5z = 3 \end{cases}$$

можно поступить следующим образом. Напомнить учащимся, что каждое уравнение системы как уравнение первой степени определяет некоторую плоскость. Вопрос о совместности системы может быть сформулирован как вопрос о том, пересекаются ли все три плоскости. Выписав координаты векторов, перпендикулярных плоскостям $\vec{n}_1$ (3; —4; 5), $\vec{n}_2$ (7; —12; 9), $\vec{n}_3$(—0,9; 1,2; —1,5), легко заметить, что векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_3$ коллинеарны, так как соответствующие координаты векторов пропорциональны $\frac{3}{-0{,}9} = \frac{-4}{1{,}2} = \frac{5}{-1{,}5}$. Очевидно, что плоскости α_1 и α_3 параллельны (причем α_1 и α_3 не совпадают). Плоскости α_1 и α_3 не имеют общих точек, а следовательно, и система уравнений не имеет решений, т. е. несовместна.

Итак, мы видим, что в некоторых случаях вопрос о совместности систем почти целиком сводится к проверке коллинеарности векторов, заданных своими координатами*.

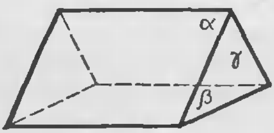


Рис. 2

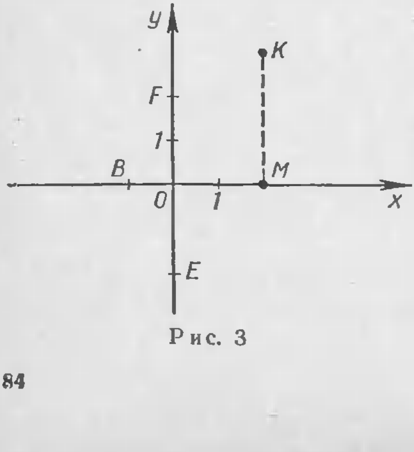


Рис. 3

Перевод задачи на геометрический язык значительно облегчает и решение систем с «параметрами». Рассмотрим, например, задачу: «При каком значении параметра a система

$$\begin{cases} 2x + ay = 8, \\ 3x - 5y = 6 \end{cases}$$

не имеет решений?» (см. № 847 в книге «Алгебра и начала анализа 10» (под ред. А. Н. Колмогорова).

* В общем случае этого утверждать нельзя. Может иметь место случай, когда все три плоскости имеют попарно неколлинеарные направляющие векторы и, значит, попарно пересекаются, но все три плоскости не будут пересекаться (см. рис. 2).

В геометрической интерпретации вопрос задачи можно поставить следующим образом: «При каком значении параметра a прямые, заданные уравнениями, параллельны и различны?» Здесь можно воспользоваться условием параллельности прямых (прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны). Из условия равенства угловых коэффициентов $\frac{2}{3} = -\frac{a}{5}$ получим, что $a = -3\frac{1}{3}$. Ясно, что при найденном значении a прямые параллельны и различны, а следовательно, и заданная система не имеет решений.

Использование идей и методов геометрии при изучении алгебры позволяет наглядно представить некоторые формальные алгебраические результаты, помогает в решении алгебраических задач. Но в то же время «любой геометрический результат может быть представлен в алгебраическом виде. Любое свойство, встречающееся в геометрической теореме, может быть переведено на язык алгебраических соотношений между координатами x и y различных точек»*. Например, затруднительно было бы определить геометрическим путем фигуру, являющуюся пересечением всех трех плоскостей:

$$12x + 6y + 7z = 5,\ 4x + 8y + z = 9{,}5x + 4y - 8z = 3.$$

Однако перевод этой задачи на «алгебраический язык» и применение «точной техники алгебры» позволяет определить, пересекаются ли все три плоскости, и установить, какая фигура будет являться пересечением всех трех плоскостей (точка, прямая или плоскость).

V. Возможность подчеркнуть широту применимости теории начал анализа для решения различных задач, в том числе геометрических, дает изучение материала на нахождение наибольшего и наименьшего значения функций. На прямое его использование в геометрии указывается самим учебным пособием по алгебре и началам анализа для IX класса. В пункте 59 «Наибольшее и наименьшее значения функций» приводятся задачи геометрического содержания, для решения которых нужно применить рассмотренное в пункте правило.

Не вызывает сомнения важность умения решать этот круг задач. Этим, по-видимому, и объясняется включение такого рода задач и упражнений в экзаменационные работы за курс средней школы. И очень естественно формировать умение их решать на геометрическом материале.

На первых порах в этих задачах используется сравнительно простой геометрический материал: ученикам требуются самые элементарные сведения из курса геометрии, чтобы свести их решение к задаче по курсу начал анализа. Например, при выполнении упражнения № 502 (см.: «Алгебра и начала анализа 9» (под ред.

---

* Сойер У. Прелюдия к математике. М., Просвещение, 1972.

А. Н. Колмогорова)) учащийся должен знать только формулы объема и площади поверхности прямоугольного параллелепипеда, а само решение этой задачи сводится к нахождению наименьшего значения функции, т. е. к материалу, непосредственно изучаемому в данном пункте.

По мере того как учащиеся усваивают вопросы, изучаемые в курсе алгебры и начал анализа, целесообразно постепенно усложнять геометрическую часть решения задачи: перед тем как учащийся перейдет к решению задачи средствами начал анализа, он должен еще будет провести рассуждения геометрического характера. Например, при выполнении упражнения № 204 (см. «Геометрия 10» (под ред. З. А. Скопеца)) сначала ученик должен с помощью соотношений между сторонами и углами прямоугольного треугольника выразить неизвестные катеты, найти площадь боковой и полной поверхностей цилиндра, а только затем решать задачу на нахождение наибольшего значения функции. Задачи, аналогичные рассмотренной выше, в последнее время постоянно включаются в экзаменационные работы за курс средней школы. И, может быть, поэтому учителя при заключительном повторении курса алгебры и начал анализа уделяют целую серию уроков их решению (рассматривают методы решения, форму записи решения и т. п.). Однако такое концентрированное изучение методов и приемов решения задач не всегда положительно влияет на состояние знаний учащихся: все-таки некоторые из них затрудняются в решении подобного рода задач или применяют нерациональные способы их решения. Например, в одной из экзаменационных работ предлагалась задача: «Периметр осевого сечения цилиндра равен 8, а длина диаметра основания может принимать значения, принадлежащие промежутку [1; 3]. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, имеющего наибольшую площадь осевого сечения».

Большинство десятиклассников, составив выражение для площади осевого сечения $S(x) = x \cdot (4 - x)$ (как функции диаметра основания), исследовали ее на промежутке $[0; \infty[$, показывали, что на промежутке $[0; 2[$ функция возрастает, а на промежутке $]2, \infty[$ — убывает, а следовательно, значение функции в точке максимума будет наибольшим. Конечно, в рассмотренном выше способе решения нет ошибок, однако учащиеся не увидели более простого хода рассуждений, где нужно было применить правило нахождения наибольшего значения функции на отрезке, на что «наталкивало» само условие задачи.

Очевидно, что регулярное решение подобных задач по мере прохождения курса геометрии поможет предотвратить многие недостатки в знаниях учащихся, обеспечит систематическое повторение важных алгебраических умений и навыков (выразить одну переменную через другую; составить функцию, выражающую зависимость между какими-то величинами; решить уравнение и т. п.), будет способствовать развитию математического языка учащихся, а все это в целом будет содействовать изучению нового материала.

Можно привести хотя бы такой пример. При выводе формулы объема пирамиды, показывая, что функция $y = V(x)$ есть первообразная для площади сечения $y = S(x)$, учащимся приходится составлять функцию $y = S(x)$. Эта часть вывода формулы вызывает иногда затруднения учащихся. Предотвратить это и поможет решение указанных задач, где одним из его элементов является составление какой-либо функции*.

Содержание курса геометрии X класса позволяет почти в каждой теме обращаться к решению задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения функций.

Например, при изучении вопросов, связанных со свойствами прямоугольного параллелепипеда, формулами площади его поверхности и объема, можно предложить учащимся задачи типа: «Определите размеры открытого бассейна объемом 32 м^3 с квадратным дном, такого, что на облицовку его стен и дна пошло бы наименьшее количество материала». При рассмотрении свойств прямой призмы, формул площади поверхности и объема можно включать задачи типа: «Периметр боковой грани правильной шестиугольной призмы равен 16 см. Найдите длину стороны основания призмы, имеющей наибольший объем». В процессе работы над свойствами цилиндра, формулами площади ее поверхности и объема целесообразно рассмотреть такого типа задачи: «Какие размеры должен иметь цилиндр, площадь полной поверхности которого равна 16 см^2, чтобы его объем был наибольшим?»

Однако в учебном пособии по геометрии таких задач явно недостаточно. Естественно, что сам учитель может восполнить этот пробел, например воспользоваться теми задачами, которые приведены в учебном пособии по алгебре и началам анализа для IX и X классов (№ 1783—1791).

Очевидно, что решение приведенных задач не сложно «с точки зрения геометрии»: не нужно строить замысловатых сечений, не требуется находить величины углов между плоскостями и т. п. Понятно, что и разбирать решение такого рода задач большинство учителей предпочитает на уроках алгебры и начал анализа.

Однако по мере того, как у учащихся накапливается «багаж» знаний по курсу геометрии, полезно включать и более сложные геометрические задачи, где наряду со знаниями курса алгебры и начал анализа для решения требуется применить свойства геометрических фигур, использовать соотношения между их элементами, выполнить некоторые дополнительные построения и т. п. Приведем пример такой задачи: «В правильной треугольной пирамиде сумма длин апофемы и высоты равна 3 см. Найдите угол, который образует апофема с плоскостью основания пирамиды, имеющей наибольший объем».

Для ее решения учащийся должен знать определение угла

---

* Это же замечание относится и к темам «Объем фигуры, полученной при вращении криволинейной трапеции» «Объем конуса», «Объем шара».

между прямой и плоскостью, уметь изображать его на чертеже, помнить теорему Пифагора и соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника и т. д. В результате применения этой теории учащиеся получают функцию объема пирамиды. Исследование этой функции на наибольшее значение они проводят средствами математического анализа.

Может возникнуть вопрос о том, на каком же уроке (на уроке алгебры и начал анализа или на уроке геометрии) нужно предлагать учащимся подобные задачи. Здесь не может быть однозначного ответа, что обусловлено целым рядом факторов: теми целями, которые ставит перед собой учитель; состоянием подготовленности класса; уровнем мастерства самого учителя и т. д. Некоторыми учителями применяется и такая форма работы, когда вся «геометрическая часть» решения задачи (например, до получения какой-либо функции) выполняется на уроке геометрии, а исследование функции проводится на уроке алгебры и начал анализа. Но, разумеется, дело самого учителя — выбрать наиболее целесообразную для его учащихся форму работы.

Подробные рекомендации по решению задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функций можно прочитать в одноименной статье этого же сборника.

VI. Общим вопросом, изучаемым в курсе геометрии и в курсе начал анализа, является вопрос о применении интеграла к вычислению площадей и объемов фигур.

Напомним, что первое знакомство с использованием интеграла для вычисления площадей учащиеся получают на уроках алгебры и начал анализа в X классе, где показывается, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком непрерывной и неотрицательной функции, можно вычислять как приращение первообразной, т. е. как интеграл.

В курсе геометрии X класса рассматривается, как с помощью интеграла можно находить объемы пространственных фигур, т. е. этим показывается, как теория математического анализа применяется для решения нового круга задач. При разборе этого материала с учащимися необходимо подчеркнуть, что и в геометрии, и в алгебре и началах анализа, для того чтобы показать, как с помощью интеграла можно вычислять площади и объемы фигур, проводятся одни и те же рассуждения. Например, при изучении § 66 «Объем фигуры, полученной при вращении криволинейной трапеции» (см. «Геометрия 10» под ред. З. А. Скопеца) и пункта 59 «Площадь криволинейной трапеции» («Алгебра и начала анализа, 9 и 10» под ред. А. Н. Колмогорова) сначала доказывается, что некоторая функция (например, объем фигуры $V(x)$) является первообразной для данной функции (соответственно площади $S(x)$ перпендикулярного сечения). Далее находится формула, задающая первообразную, и показывается, как можно найти объем фигуры. На эту общность в рассуждениях и необходимо обратить внимание учащихся.

Подчеркнуть общность рассуждений важно не только для того, чтобы показать применение теории математического анализа в геометрии, но и для того, чтобы помочь учащимся при подготовке этого теоретического материала к опросу (к выпускным и вступительным экзаменам), показать, что им не нужно в отдельности учить метод доказательства каждой теоремы (об объеме пирамиды; об объеме фигуры, полученной при вращении криволинейной трапеции, и т. п.), так как он одинаков для каждой из них.

Как уже отмечалось, изучение материала о вычислении объемов фигур в курсе геометрии проходит после рассмотрения темы «Первообразная и интеграл» в курсе алгебры и начал анализа и к тому же с большим перерывом. Поэтому перед изучением вопросов, связанных с выводом формул объемов, целесообразно повторить с учащимися необходимые сведения из курса начал математического анализа; понятия производной функции, первообразной и интеграла; правила нахождения первообразных. Это повторение можно проводить различными путями, включая задачи из темы «Первообразная и интеграл» в устные упражнения, в самостоятельные работы, в домашние задания и т. п. По-видимому, нет нужды увлекаться какими-то сложными заданиями. Для подготовки учащихся к активному восприятию выводов формул объемов фигур достаточно предложить им такие упражнения, которые помогут вспомнить определение производной, первообразной, интеграла, позволят еще раз повторить правила нахождения первообразных. Приведем в качестве примера некоторые упражнения:

а) найдите с помощью определения производную функцию $y = 4x - 5$;

б) докажите, что функция $V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$ является первообразной для функции $S(x) = 4\pi x^2$;

в) найдите какую-либо первообразную функции $f(x) = \sin x + 3$;

г) вычислите $\int\limits_0^3 (x^2 + 4x - 1)\, dx$.

Итак, при выводе формул для вычисления объемов фигур на уроках геометрии у учителя появляется возможность показать применение теории начал анализа, подчеркнув тем самым связи, существующие между курсом геометрии и курсом алгебры и начал анализа.

Теперь очень кратко остановимся на некоторых возможных формах осуществления взаимосвязи между школьными математическими курсами. Во-первых, это может быть работа в рамках одного предмета, когда мы иллюстрируем некоторые понятия, законы одного курса примерами из другого курса; используем теории одного предмета для решения задач другого (например, применение производной для решения задач на нахождение наибольшего или наименьшего значения объема геометрической фигуры). Во-вторых, это может быть проведение «единых» уроков, на которых рассматривается как алгебраический, так и геометрический материал. Такие «единые» уроки проводились в 1976/77 и 1977/78 учебных годах при изучении материала о построении графиков гармонических колебаний (курс алгебры и начал анализа) и координатных формул преобразований (курс геометрии). Остановимся подробнее на опыте их проведения.

Применение координатных формул преобразований к изучению графиков гармонических колебаний

Вопрос о построении графиков функций вида $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ не нов для средней школы. Однако его изучение всегда было сопряжено с определенными трудностями, которые не исчезли и с введением новой программы, хотя подход к изучению этого материала несколько изменился по сравнению с привычным для учителя. Напомним, как выполняли построение графиков гармонических колебаний по старой программе. Например, для построения графика функции $y = \sin \omega x$ соотношение $y_0 = \sin x_0$ преобразовывалось к виду $y_0 = \sin\left(\omega\left(\frac{x_0}{\omega}\right)\right)$ и отмечалось, что функция $y = \sin \omega x$ принимает то же самое значение y_0 при $x = \frac{x_0}{\omega}$. Далее говорилось, что это означает, что функция $y = \sin \omega x$ принимает свои значения в ω раз чаще, чем функция $y = \sin x$, после чего декларировалось, что график функции $y = \sin 2x$ получается из графика функции $y = \sin x$ путем «сжатия» в 2 раза, а график $y = \sin\frac{x}{2}$ — путем «растяжения» в 2 раза синусоиды $y = \sin x$*.

В учебном пособии «Алгебра и начала анализа 10» (под ред. А. Н. Колмогорова) делается иначе: сначала рассматривается некоторое отображение числовой плоскости на себя, которое задается координатными формулами. Затем выясняется вопрос об уравнении образа графика произвольной функции $y = f(x)$ при заданном отображении плоскости на себя. Полученные общие теоретические результаты применяются к решению конкретных задач — построению графиков гармонических колебаний. По уравнению, например $y = \cos \omega x$, выясняется, какое из изученных преобразований плоскости нужно выполнить, чтобы получить требуемый график, используя график функции $y = \cos x$. По-видимому, предполагалось, что в условиях новой программы, когда учащиеся уже в VI классе встречались с отображениями плоскости на себя, такой подход будет способствовать более глубокому пониманию и прочному усвоению способов построения графиков. К сожалению, этого не произошло. Такой вывод позволяют сделать наблюдения за хо-

---

* См.: Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С. Алгебра и элементарные функции, ч. 2. М., 1975.

дом преподавания математики по новой программе в X классе, а также результаты устных опросов учащихся и письменных контрольных работ. Так, в феврале 1977 г. в г. Кемерово и в Кемеровской области был проведен устный опрос десятиклассников. Среди вопросов был такой: «На рисунке изображены графики функций $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $y = 2 \cos x$ (графики пронумерованы). Укажите номер графика, соответствующего каждой из формул».

Более половины учащихся перепутали графики функций $y = 2 \cos x$ и $y = \cos 2x$. А когда у тех, кто номера графиков указал верно, спрашивали, с помощью какого преобразования из графика функции $y = \cos x$ можно получить, например, график функции $y = \cos 2x$, то в большинстве случаев ответ был неправильным.

Можно указать некоторые причины этих недостатков. В частности, непосильным для усвоения учащимися оказался термин «сжатие в отношении $1/k$», который заменил термин «сжатие в k раз» и «растяжение в k раз». И наконец, одной из важных причин является оторванность в изложении этого материала от курса геометрии.

Остановимся несколько подробнее на последней из указанных причин. В X классе на уроках алгебры и начал анализа рассматривается пункт 81 «Графики гармонических колебаний», а на уроках геометрии почти в это же время изучается § 46 «Координатные формулы геометрических преобразований. Гомотетия». Эти темы по содержанию очень близки. Однако зачастую внимание учащихся на тесную их взаимосвязь не обращается, хотя метод нахождения образа геометрической фигуры, разбираемой в курсе геометрии, может быть с успехом применен и в алгебре. Более того, с нашей точки зрения, использование его при изучении преобразований графиков будет способствовать более глубокому пониманию изучаемого материала, поможет преодолеть некоторые трудности, возникающие при построении графиков гармонических колебаний.

В нашем опыте работы мы провели совместное изучение двух тем на так называемых «единых» уроках, которые не нарушили структуры курсов. При этом в изложении нового материала мы не вышли за рамки времени, отведенного тематическим планом. На проведенных уроках сначала рассматривался геометрический материал — координатные формулы преобразований пространства (плоскости). Далее изученные координатные формулы преобразований использовались для нахождения образа геометрической фигуры в заданном отображении, в частности для нахождения образов графиков уравнений гармонических колебаний.

Из-за сокращения времени на изучение математики в 10 классе этот материал из основного курса исключен. Однако полезно развить умение строить графики с использованием простейших преобразований на факультативе. Описание проведенных нами уроков поможет организовать такие занятия.

Урок 1. Параллельный перенос и его координатные формулы. Построение графика $y = \cos(x + a)$

Урок был начат с повторения правил действий над векторами, заданными своими координатами. Внимание учащихся обратили на то, что все эти правила справедливы не только для пространства, но и для плоскости. Разница лишь в том, что вектор плоскости будет иметь две координаты, а не три (это следует из теоремы о единственности разложения вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам). Заметим, что понятие о прямоугольном базисе, системе координат на плоскости и координатах вектора учащиеся получили в курсе алгебры и начал анализа в IX классе в связи с выводом формул сложения.

Затем была рассмотрена первая часть задачи § 46 («Геометрия 10») «Координатные формулы параллельного переноса». Учащимся предложили записать координатные формулы для планиметрического случая. После наших предварительных разъяснений они смогли это сделать самостоятельно, получив ответ: $x' = x + a$, $y' = y + b$, где $(x; y)$ — координаты точки; $(x'; y')$ — координаты ее образа; $(a; b)$ — координаты вектора.

Далее мы поставили одну из основных задач этой темы: найти уравнение образа фигуры, полученного в результате заданного отображения. Прежде всего мы предложили выполнить следующее упражнение: «Найти уравнение образа прямой $y = 2x + 5$ при параллельном переносе $\vec{a} = (3; 1)$».

Конечно, для решения этой задачи можно было бы поступить так. Вспомнить, что параллельный перенос переводит прямую в прямую, найти координаты каких-либо двух точек, принадлежащих данной прямой, и, используя координатные формулы параллельного переноса для случая плоскости, вычислить координаты образов этих точек. Затем среди уравнений вида $y = kx + b$ указать то, которому удовлетворяют полученные координаты. Это решение можно еще более упростить, если вспомнить, что при параллельном переносе прямая переходит в параллельную ей прямую. Поэтому искомое уравнение имеет вид $y = 2x + b$. А для отыскания b достаточно знать координаты только одной точки, лежащей на этой прямой.

Мы же, решая эту задачу, рассуждения вели следующим образом: чтобы определить, в какую фигуру перейдет данная прямая, найдем уравнение ее образа, используя соотношения между координатами точки и образа.

Если $M'(x'; y')$ — точка, являющаяся образом точки $M(x; y)$ при параллельном переносе $\vec{a} = (3; 1)$, то $x' = x + 3$, $y' = y + 1$. Поставленная нами задача заключается в том, чтобы, имея уравнение $y = 2x + 5$, связывающее координаты точек, получить уравнение для координат образов этих точек.

Пусть M_0 $(x_0; y_0)$ — произвольная точка, принадлежащая графику функции $y = 2x + 5$, тогда $y_0 = 2x_0 + 5$ — верное равенство. Если M_0' $(x_0'; y_0')$ — образ точки M_0 $(x_0; y_0)$, то $x_0' = x_0 + 3$, $y_0' = y_0 + 1$. Выразив из последних равенств x_0 и y_0 через x_0' и y_0', получим: $x_0 = x_0' - 3$, $y_0 = y_0' - 1$. Подставив в равенство $y_0 = 2x_0 + 5$ выражения x_0 и y_0 через x_0' и y_0', найдем, что $y_0' - 1 = 2(x_0' - 3) + 5$ или $y_0' = 2x_0'$. Таким образом, координаты любой точки, являющейся образом точки данной прямой, связаны зависимостью $y_0' = 2x_0'$, а значит, все они лежат на прямой $y = 2x$*.

Заметим, что, на наш взгляд, очень важно четкое и подробное решение этой, может быть, совсем несложной задачи. Дело в том, что на этом примере учащиеся должны усвоить саму идею отыскания уравнения образа фигуры при некотором преобразовании, заданном координатными формулами.

Затем учащимся для самостоятельного решения была предложена задача на нахождение уравнения образа плоскости при параллельном переносе (см. упр. № 34 из «Геометрии 10»).

После этого мы перешли к решению аналогичной задачи на нахождение уравнения образа графика гармонических колебаний $y = \cos x$ при параллельном переносе $\vec{a} = (a; 0)$. Внимание десятиклассников было обращено на тот факт, что еще до нахождения уравнения образа гармонических колебаний нам уже известно, какой вид будет иметь образ графика данного уравнения. Ученики смогли сами объяснить сделанный вывод, используя свойство параллельного переноса: фигура при параллельном переносе переходит в фигуру, конгруэнтную данной. Поставленная же нами задача состояла в том, чтобы найти ее уравнение. Объяснение проводилось по тому же плану, что и решение предыдущих заданий.

Пусть M_0 $(x_0; y_0)$ — произвольная точка, принадлежащая графику функции $y = \cos x$, тогда $y_0 = \cos x_0$ — верное равенство. Если M_0' $(x_0'; y_0')$ — образ точки M_0, то, используя координатные формулы параллельного переноса, мы получим, что $x_0' = x_0 + a$, $y_0' = y_0$. Выразив из последних равенств x_0 и y_0 через x_0' и y_0' ($x_0 = x_0' - a$ ($y_0 = y_0'$) и подставив полученные выражения в равенство $y_0 = \cos x_0$, найдем, что $y_0' = \cos(x_0' - a)$. Следовательно, координаты любой точки, являющейся образом точки косинусоиды ($y = \cos x$), связаны зависимостью $y' = \cos(x' - a)$, т. е. мы получили уравнение образа гармонических колебаний ($y = \cos(x - a)$) при параллельном переносе $\vec{a} = (a; 0)$.

---

* Отметим, что для полного решения такой задачи надо было бы показать, что любая точка прямой $y = 2x$ является образом некоторой точки, лежащей на прямой $y = 2x + 5$, т. е. прообраз любой точки прямой $y = 2x$ лежит на прямой $y = 2x + 5$. При необходимости учитель может это легко сделать, проводя рассуждения, аналогичные данным, рассматривая обратное преобразование, т. е. параллельный перенос $\vec{a} = (-3; -1)$.

Учащимся известно, что полученное уравнение также является уравнением гармонических колебаний с той же частотой и амплитудой, но с другой начальной фазой.

Далее с учащимися рассмотрели более общий случай. Если задано уравнение $y = A \cos(\omega x + \varphi)$, то при параллельном переносе $\vec{a} = (a; 0)$ график этого уравнения перейдет в график уравнения $y = A \cos(\omega(x - a) + \varphi)$ или $y = A \cos(\omega x + (\varphi - \omega a))$, т. е. график гармонического колебания переходит в график гармонического колебания с той же частотой и амплитудой.

При решении всех предыдущих задач мы выясняли, какое уравнение будет иметь образ заданной геометрической фигуры (в частном случае — графика) в рассматриваемом отображении на себя пространства или плоскости. Но ученикам приходится выполнять и другое задание: построить график функции, например $y = \cos(x + 3)$. По-видимому, это можно сделать различными способами. Однако использование ранее изученного материала обусловило выбор нашего способа. В разобранном выше задании было показано, что график функции $y = \cos x$ переходит в график функций $y = \cos(x - a)$ при параллельном переносе $\vec{a} = (a; 0)$. Значит, чтобы построить график $y = \cos(x + 3)$, достаточно построить график функции $y = \cos x$ и выполнить параллельный перенос $\vec{a} = (-3; 0)$.

Полученные теоретические сведения учащиеся применили при решении следующей задачи:

«Укажите преобразования, с помощью которых из графика функции $y = \cos x$ можно получить графики функций $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ и $y = \cos(x + 1)$. Постройте эти графики».

После подведения итога урока десятиклассникам предложили такое домашнее задание: «Геометрия 10» — § 46 (1); «Алгебра и начала анализа 10» — п. 81 (1) № 64, 65 (построить графики); з а д а ч а: «С помощью каких преобразований из графика $y = 2\cos(3x + 1)$ могут быть получены графики функций а) $y = 2\cos(3x + 7)$, б) $y = 2\cos(3x - 2)$?»

Урок 2. Сжатие к оси Ox, растяжение от оси Ox. Построение графика $y = k \cos x$

На этом уроке изучалось отображение плоскости на себя, заданное условием $(x; y) \to (x; ky)$, где $k > 0$. Особое внимание было уделено задаче на нахождение графика образа заданной функции в этом отображении, а также построению графиков. Урок начали с повторения координатного задания изученных ранее отображений и решения задач на отыскание координат образов точек в различных преобразованиях плоскости. С этой целью были выполнены следующие устные упражнения:

1) С помощью каких преобразований из графика функции $y = \cos x$ можно получить график функции $y = \cos(x + 7)$, $y = \cos(x - 2)$, $y = \cos(x + \pi)$? (Указать координаты вектора.)

2) Назвать координаты точек, симметричных данным относительно а) оси Oy, б) оси Ox, в) начала координат.

В связи с решением этой задачи учащиеся вспомнили соотношения между координатами точки и ее образа в заданных преобразованиях плоскости. (Напомним, что этот материал рассматривался в курсе геометрии VIII класса.) Если $(x; y)$ — координаты точки, а $(x'; y')$ — координаты ее образа, то имеем:

а) $x' = -x,\ y' = y;$ б) $x' = x,\ y' = -y;$ в) $x' = -x;\ y' = -y.$

В самом простейшем случае формулы (в) были обобщены для пространства: «Найдите координатные формулы центральной симметрии с центром O (0; 0; 0)» (задача № 35 (1) из «Геометрии 10»).

При изложении нового материала были выделены следующие моменты: 1) раскрытие смысла того «действия», которое производит данное отображение плоскости на себя (растяжение от оси Ox или сжатие к оси Ox);

2) получение уравнения образа геометрической фигуры в заданном отображении;

3) нахождение среди заданных функций тех, графики которых можно получить с помощью этого преобразования.

Объяснение нового материала велось таким образом:

Рассматривалось отображение плоскости на себя: $(x; y) \to (x; ky)$, где $k > 0$. Сначала на конкретных примерах $\left(k = 2,\ k = \frac{1}{3}\right)$ выяснили особенности данного отображения. На координатной плоскости отметили несколько произвольных точек, которые могли быть расположены в любом из квадрантов или на осях координат. Затем определили, как будут расположены образы этих точек. Во-первых, учащиеся заметили, что существуют точки, которые отображаются на себя. Это точки с координатами $(x; 0)$, т. е. точки оси Ox. Данный вывод следует из того, что $(x; 0) \to (x; k \cdot 0)$. Во-вторых, они обратили внимание на то, что координаты образов имеют одинаковую с данной точкой абсциссу и ординату, в k раз бо́льшую (при $k > 1$) или составляющую k-ю часть данной ординаты (при $0 < k < 1$), построили на чертеже образы отмеченных точек (рис. 4).

После этого был поставлен вопрос: «На какую фигуру отображается данная геометрическая фигура, например график функции $y = f(x)$, в заданном отображении плоскости на себя?» (На первом уроке на такой же вопрос мы отвечали для конкретной функции $y = 2x + 5$.) При объяснении мы придерживались той же последовательности рассуждений, что и на предыдущем уроке.

Пусть произвольная точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, тогда $y_0 = f(x_0)$ — верное равенство. Если $M_0'(x_0'; y_0')$ — образ точки M_0, то по условию заданного отображе-

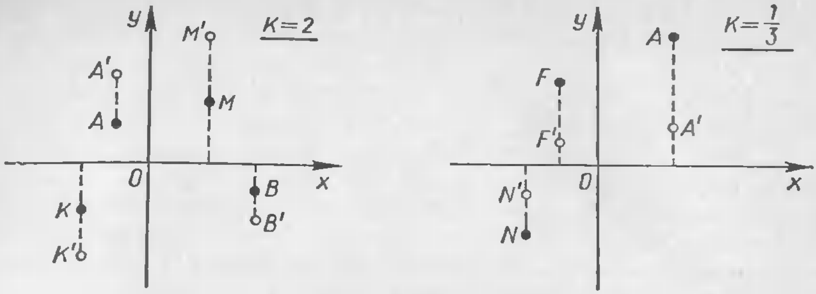


Рис. 4

ния $x_0' = x_0$, $y_0' = ky_0$. Выразив из последних равенств x_0 и y_0 через x_0' и y_0', получим: $x_0 = x_0'$, $y_0 = \frac{1}{k} y_0'$. Подставив в равенство $y_0 = f(x_0)$ выражения x_0 и y_0 через x_0' и y_0', найдем, что $\frac{1}{k} y_0' = f(x_0')$ или $y_0' = kf(x_0)$. Значит, координаты любой точки, являющейся образом точки графика функции $y = f(x)$, связаны зависимостью $y = kf(x)$.

Мы выяснили, что график функции $y = f(x)$ отображается на график функции $y = g(x)$, где $g(x) = kf(x)$ (1). Анализ равенства (1) показывает, что при одних и тех же абсциссах ординаты образов в k раз больше ординаты точки (при $k > 1$) или составляют ее k-ю часть (при $0 < k < 1$), т. е. данное отображение плоскости на себя преобразует график функции f в график функции g так, что при $k > 1$ происходит растяжение графика функции f от оси Ox, а при $0 < k < 1$ — сжатие этого графика к оси Ox.

Итак, мы обнаружили свойство данного отображения плоскости на себя — «выполнять» растяжение от оси Ox или сжатие к оси Ox графиков функций.

Затем полученные теоретические сведения применили для решения конкретной задачи: найти образ графика функции $y = \cos x$ в отображении плоскости на себя $(x; y) \to (x; 3y)$. Было отмечено сразу, что заданное отображение плоскости на себя — растяжение от оси Ox, так как $k = 3$ и $3 > 1$.

Из условия (1) мы получим, что $g(x) = 3 \cos x$, т. е. график функции $y = \cos x$ переходит в график $g(x) = 3 \cos x$. Чтобы построить график функции g, надо выполнить растяжение от оси Ox графика функции $y = \cos x$ в 3 раза (рис. 5).

Внимание учащихся было обращено на то, что полученное уравнение $g(x) = 3 \cos x$ также является уравнением гармонических колебаний с той же частотой и начальной фазой (что и уравнение $y = \cos x$), но с другой амплитудой. Этот результат полезно сопоставить с выводом предыдущего урока: при параллельном переносе частота и амплитуда гармонических колебаний остаются прежними, изменяется только начальная фаза.

После этого было выяснено, графики каких функций можно получить из графика функции $y = \cos x$ с помощью отображения плоскости на себя, заданного следующим образом: $(x; y) \to (x; ky)$ при $k > 0$.

Анализ равенства (1) показал, что график функции g ($g(x) = kf(x)$) получается из графика функций f растяжением от оси Ox (при $k > 1$) или сжатием к оси Ox (при $0 < k < 1$). Следовательно, чтобы построить графики функций $y = 3\cos x$, $y = 7\cos x$, $y = 2{,}5\cos x$, надо выполнить растяжение от оси Ox графика $y = \cos x$ соответственно в 3; 7; 2,5 раза, а чтобы построить графики $y = \frac{1}{2}\cos x$, $y = \frac{2}{3}\cos x$ — выполнить сжатие к оси Ox в 2; 1,5 раза.

Чтобы убедиться в *том*, что учащиеся *усвоили* особенности рассмотренного отображения плоскости на себя, им были предложены упражнения, в которых требовалось на практике применить изученные факты теории. В классе были выполнены следующие устные упражнения:

а) найдите координаты образов точек $M(0; 3)$, $N(4; 7)$, $E\left(-\frac{\pi}{2}; 3\right)$, $E(-2{,}5; -6)$ в отображениях: а) $(x; y) \to (x; 4y)$, б) $(x; y) \to \left(x; \frac{5}{7}y\right)$;

б) среди функций $y = 2 + \sin x$, $y = \frac{2}{7}\sin x$, $y = \sin(x - 1)$ укажите те, графики которых строятся с помощью сжатия к оси Ox или растяжения от оси Ox графика функции $y = \sin x$;

в) на рисунке 6 изображены графики функций $y = \cos x$, $y = 2\cos x$, $y = \frac{1}{2}\cos x$. Укажите номер графика, соответствующий каждой из формул.

Как и на первом уроке, учащимся были также предложены задания на построение графиков гармонических колебаний. Со-

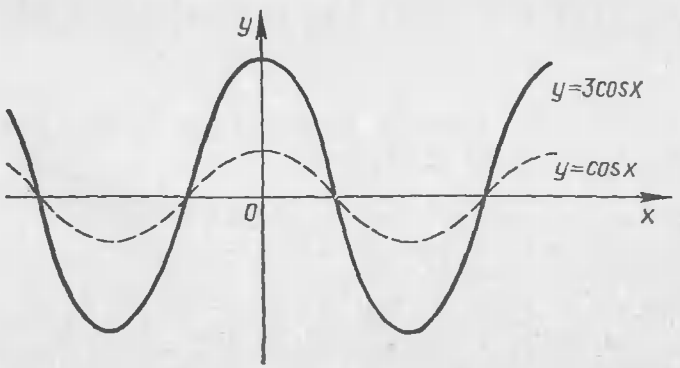


Рис. 5

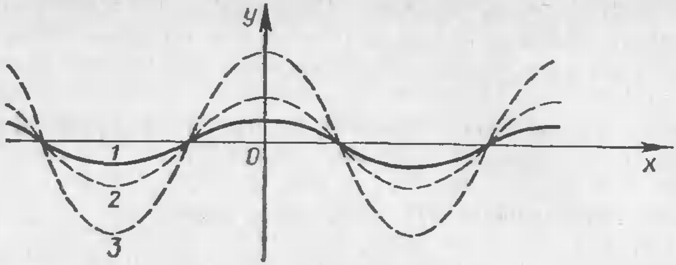


Рис. 6

держание изученного нами материала определило выбор способа их решения.

В этом случае ученик должен был определить, с помощью каких преобразований плоскости из известного уже графика функции можно получить требуемый; указать последовательность этих преобразований, а потом выполнить нужные построения.

Письменно были сделаны такие упражнения: схематически построить графики функций а) $y = 2{,}5 \sin x$, б) $y = \frac{3}{4} \sin x$, в) $y = 2 \sin (x + 1)$. (При построении используйте график функции $y = \sin x$.)

Выполнение упражнений «а)» и «б)» не вызвало никаких затруднений. Основное внимание уделили разбору случая «в)», в котором для решения поставленной задачи нужно последовательно выполнить параллельный перенос и растяжение от оси Ox, т. е. композицию двух отображений. Здесь же учащиеся заметили, что последовательность преобразований может быть иной: сначала растяжение от оси Ox, а затем параллельный перенос.

Домашнее задание выглядело следующим образом: «Алгебра и начала анализа 10» — п. 81 (2), № 62, 63 (построить график); задача: «С помощью каких преобразований из графика функции $y = \lg x$ могут быть получены графики функции

а) $y = 3 \lg x$, б) $y = \lg (x + 4)$, в) $y = \frac{1}{2} \lg (x - 2)$?»

Урок 3. Сжатие к оси Oy, растяжение от оси Oy

На этом уроке рассматривалось отображение плоскости на себя, которое задается следующим образом: $(x; y) \to (kx; y)$, где $k > 0$. Изучение нового материала проводилось по плану, предложенному на предыдущем уроке. В статье остановимся подробнее лишь на второй части объяснения, а именно: выясним, в какой график перейдет при данном отображении плоскости на себя график функции $y = f(x)$. С методикой решения этой задачи мы уже знакомы.

Пусть произвольная точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, а $M_0'(x_0'; y_0')$ — есть образ этой точки. Тогда $y_0 = f(x_0)$ — верное равенство, так как $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. В силу условия, задающего это отображение, $x_0' = kx_0$, $y_0' = y_0$. Выразив из последних равенств x_0 и y_0 через x_0' и y_0', получим: $x_0 = \frac{1}{k}x_0'$, $y_0 = y_0'$.

Подставив в равенство $y_0 = f(x_0)$ выражения x_0 и y_0 через x_0' и y_0', найдем, что $y_0' = f\left(\frac{1}{k}x_0'\right)$. Следовательно, координаты любой точки, являющейся образом точки графика функции $y = f(x)$, связаны зависимостью $y = f\left(\frac{1}{k}x\right)$. Заметим при этом, что если точка принадлежит графику функции $y = f(x)$, то ее образ в заданном преобразовании должен будет принадлежать графику функции $y = g(x)$, причем $g(x) = f\left(\frac{1}{k}x\right)$ (1).

После таких рассуждений, чтобы показать особенности данного отображения плоскости на себя, был поставлен вопрос о том «действии», которое «производит» с графиком функции f это преобразование. Анализ равенства (1) показал, что значения ординат точки и ее образа равны при условии, что абсцисса образа составляет k-ю часть абсциссы точки (при $k > 1$) или в k раз больше (при $0 < k < 1$). В первом случае происходит сжатие к оси Oy, во втором — растяжение от оси Oy.

После изучения всех, предусмотренных нашим планом отображений плоскости на себя нужно было позаботиться о том, чтобы учащиеся научились отличать различные преобразования плоскости (каким бы способом они ни задавались) и могли охарактеризовать то «действие», которое они «производят». С этой целью в упражнения включались, например, задания типа: «Какие из отображений плоскости на себя задают сжатие к оси Oy, растяжение от оси Oy:

а) $(x;\ y) \xrightarrow{f} (x;\ y-3)$; д) $x' = \frac{2}{3}x$;

б) $(x;\ y) \xrightarrow{g} (3x;\ y)$;

в) $(x;\ y) \xrightarrow{h} (x;\ 7y)$; е) $x' = x$,

г) $(x;\ y) \xrightarrow{\varphi} \left(\frac{1}{10}x;\ y\right)$; $y' = y + 4$,

где (x, y) — координаты точки, а (x', y') — координаты ее образа?»

Как и в предыдущих уроках, были поставлены задачи о нахождении преобразований, с помощью которых из одного графика можно получить другой, и о построении графиков с помощью этих преобразований.

Из равенства (1) и следующего за ним анализа было очевидно, что график функции g получается из графика функции f сжатием к оси Oy при $k > 1$ или растяжением от оси Oy при $0 < k < 1$.

Проиллюстрируем теперь, как только что полученный результат применялся для решения конкретной задачи: построить график функции $g(x) = \sin 3x$.

Во-первых, учащиеся обратили внимание на формулу, задающую функцию ($\sin 3x$), и установили, что график такой функции можно получить из графика функции $y = \sin x$ сжатием к оси Oy в 3 раза, так как $k = 3$ и $3 > 1$. Этот вывод был пояснен еще и такими рассуждениями: если график функции $y = \sin x$ «совершает полное колебание» на промежутке длиной 2π, т. е. 2π — период функции, то функция имеет период $\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, на промежутке длиной 2π график функции $g(x) = \sin 3x$ «совершит 3 полных колебания».

Затем десятиклассники схематично изобразили график функции $y = \sin x$ и, чтобы получить график функции $g(x) = \sin 3x$, «выполнили» сжатие к оси Oy в 3 раза.

Далее было подчеркнуто, что в рассматриваемом отображении плоскости на себя амплитуда и начальная фаза гармонических колебаний остаются теми же, что и были, меняется только частота.

Для закрепления изученного материала с учащимися были разобраны следующие упражнения:

1) С помощью каких преобразований из графика функции $y = x^2$ можно получить графики функций $y = (x - 2)^2$, $y = 2x^2$, $y = x^2 + 4$, $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$?

2) Указать последовательность преобразований, с помощью которых из графика функции $y = \cos x$ можно построить график функции $y = \cos 2x - 3$.

3) Найти уравнение образа прямой $y = 7x + 2$ в отображении плоскости на себя: $(X, Y) \to (X, 9Y)$.

4) Построить графики функций:

а) $y = \sin \frac{1}{3}x$, б) $y = \cos 4x$, в) $y = \frac{1}{2}\cos 4x$.

При выполнении последнего упражнения задавались вопросы:

а) Из графика какой функции можно получить график $y = \sin \frac{1}{3}x$, с помощью какого преобразования?

б) Какие из параметров гармонических колебаний остаются неизменными? И т. п.

В домашнее задание было включено: «Алгебра и начала анализа 10» — п. 81 (3), № 60, 61 (построить график); задача: «С помощью каких преобразований из графика $y = 2^x$ можно получить графики а) $y = 2^{x+1}$, б) $y = 2^{4x}$, в) $y = 2^{x+1} - 5$?»

Б. В. Сорокин

ОРГАНИЗАЦИЯ И СОДЕРЖАНИЕ ПОВТОРЕНИЯ

Повторение — важная часть процесса обучения. Перед ним ставятся разнообразные задачи: подкрепление в памяти учащихся тех или иных фактов, восстановление на необходимом уровне каких-либо навыков, обобщение и систематизация изученного материала.

Выделяют несколько видов повторения: повторение в начале учебного года, текущее повторение, тематическое повторение, заключительное повторение в конце учебного года или в конце изучения некоторого курса. Каждому из видов повторения в той или иной степени присущи все перечисленные выше задачи. Однако, например, перед повторением в начале учебного года в большей степени стоит задача подкрепления знаний и восстановления навыков, необходимых при изучении нового материала; если взять заключительное повторение, то здесь на первый план выступает задача установления взаимосвязей между частями изучавшегося материала. Кроме того, каждый вид повторения имеет свои особенности, связанные с тем, о каком классе или возрасте учащихся идет речь.

В этой статье мы остановимся на повторении в начале учебного года и текущем повторении применительно к изучению курса алгебры и начал анализа в IX—X классах.

Необходимо отметить, что повторение — часть учебного процесса, в значительной степени зависящая от качества усвоения учащимися данного класса ранее изученного материала, уровня развития математических способностей учащихся и т. п. Поэтому вряд ли возможно создать систему повторения какого-либо курса, пригодную для всех учителей и классов. Однако существуют некоторые объективные закономерности отбора содержания и организации повторения. На этих закономерностях мы и постараемся подробнее остановиться, иллюстрируя их примерами заданий, которые могут предлагаться учащимся. Безусловно, эти задания не могут отражать особенностей конкретного класса, поэтому в случае их использования учитель может их изменить в каждом конкретном случае по своему усмотрению.

Вначале несколько слов об организации повторения. В зависимости от вида повторения, характера повторяемого материала и особенностей конкретного класса повторение может проводиться в процессе выполнения устных упражнений, при решении письменных заданий под руководством учителя, при выполнении самостоятельной работы (решение задач, работа с текстом учебника или справочной литературой), при выполнении домашней работы и, наконец, при прослушивании ответов учащихся или рассказа учителя.

Активное повторение, т. е. самостоятельное воспроизведение изучавшегося ранее материала и в особенности его применение, более эффективно, чем пассивное повторное восприятие того же материала. Нужно поставить учащихся в такие условия, которые будут способствовать восстановлению в их памяти изученных фактов или приемов решения. Вероятно, легче всего это сделать с помощью специально подобранной системы упражнений и вопросов теоретического плана. Причем удельный вес упражнений в этой системе должен быть больше, чем теоретических вопросов. Это связано с тем, что при выполнении упражнений учащиеся вынуждены проявлять бо́льшую активность, чем при ответе на теоретические вопросы, они вынуждены не только вспоминать алгоритм выполнения упражнения (если он был известен), но и применять его для решения конкретной задачи. Вместе с тем при выполнении упражнений часто бывает нужно вспомнить некоторые теоретические факты, теоремы, определения, правила.

Кроме того, даже при условии правильного ответа на теоретический вопрос, касающийся какого-либо понятия, трудно установить степень владения учащимися данным понятием, пока он не проделает упражнения, выполнение которых опирается на определение или свойства этого понятия. А ведь при повторении важно убедиться в том, что на необходимом для дальнейшего изучения предмета уровне учащиеся этим материалом владеют. Например, определение производной функции можно повторить по-разному. Можно задать вопрос: «Что называется производной функции в точке x_0?», а можно предложить учащимся задачу: «Используя определение производной функции в точке, найти производную функции $f(x) = 3x^2$ в точке x». Очевидно, что правильный ответ на первый вопрос не свидетельствует о владении учащимися понятием производной функции в точке. В некоторых случаях учащиеся, запомнившие формулировку определения производной, или совсем ее не понимают, или не понимают отдельные термины, т. е. в том и в другом случае не могут использовать сформулированное определение при решении задач. Правильное выполнение второго задания позволяет утверждать, что учащиеся усвоили понятие производной функции в точке; если же решение ошибочное, то по характеру ошибки можно будет определить, что же именно осталось не усвоенным учащимися, и уделить этим вопросам большее внимание при дальнейшем повторении.

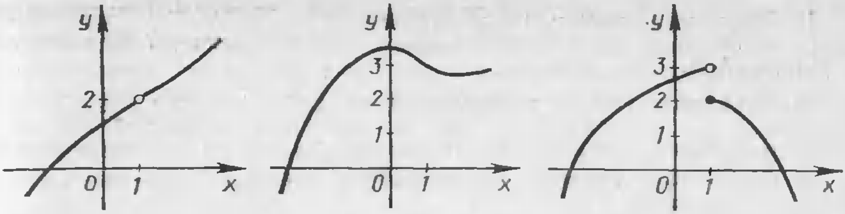


Рис. 1

Не следует думать, однако, что под словом «упражнения» мы понимаем только задания, выполнение которых требует лишь знания какого-то алгоритма. Нет, для повторения смысла некоторых понятий бывают полезны задания, решение которых можно считать «теоретическим». Например, для того чтобы вспомнить смысл понятия предела функции в точке вместо задания типа: «Доказать по определению предела, что $\lim\limits_{x \to 3} (2x + 5) = 11$», — которое может быть выполнено и в случае, если ученик знает лишь алгоритм его выполнения и не понимает определения предела функции в точке, целесообразнее предложить учащимся такое: «Какие из функций, графики которых изображены на рисунке (см. рис. 1), имеют предел при $x \to 1$? Чему он равен?»

Выполнение этого задания позволит учащимся вспомнить геометрический смысл понятия «предел функции в точке» — вещь, на наш взгляд, гораздо более важную в общеобразовательном плане, чем алгоритм доказательства того, что число b является пределом данной функции при $x \to a$, или даже чем формулировка определения предела функции в точке.

Итак, наиболее целесообразной, на наш взгляд, формой организации повторения следует признать выполнение упражнений. Однако в некоторых случаях не следует отказываться и от рассказа учителя, который, вероятно, должен быть ближе к беседе с учащимися, чем к лекции. Наиболее успешно такая форма организации повторения может быть использована при обобщающем повторении, где основной задачей является систематизация полученных знаний. Так, например, при повторении раздела «Бесконечные последовательности и их пределы» учителю в своей беседе целесообразно акцентировать внимание на связи между свойствами последовательностей: сходимостью, монотонностью и ограниченностью. Полезно обратить внимание учащихся, например, на то, что для доказательства ограниченности последовательности достаточно доказать ее сходимость, а вот для доказательства сходимости одной ограниченности уже недостаточно, нужно еще доказать монотонность, зато для доказательства того, что последовательность расходится, достаточно доказать, что она не является ограниченной. Такую беседу необходимо сопровождать упражнениями, которые предлагаются учащимся, например:

1) Докажите, что последовательность $a_n = \frac{3n+5}{2n+7}$ является ограниченной.

2) Докажите, что последовательность $b_n = \frac{1}{3^n}$ имеет предел.

3) Докажите, что последовательность $c_n = 3n$ не имеет предела.

4) Приведите пример ограниченной последовательности, не имеющей предела.

5) Приведите пример монотонной последовательности, не имеющей предела.

Повторительные упражнения можно включать в домашнее задание. Особенно это удобно делать в том случае, если для выполнения этих упражнений может возникнуть необходимость повторить и теоретический материал, причем это повторение вполне посильно учащимся без помощи учителя. Приведем пример.

Пусть необходимо повторить важный в общеобразовательном плане вопрос — физический смысл первой и второй производной. Теоретический материал учащиеся вполне могут самостоятельно повторить по учебнику. Поэтому в домашнее задание можно включить задачу: «Тело движется по закону $S(t) = t^2 - 3t + 2$ (расстояние измеряется в метрах, время — в секундах). Определите скорость и ускорение тела в момент времени $t = 1$ с. В какой момент времени скорость тела равна нулю?»

Нужно пояснить учащимся, что в случае возникновения каких-либо затруднений можно обратиться к п. 24 учебного пособия «Алгебра и начала анализа, 9—10» (под ред. А. Н. Колмогорова).

Перейдем теперь к характеристике двух видов повторения: повторения в начале учебного года и текущего повторения. Следует отметить, что эти виды повторения близки по своей основной задаче: обеспечению возможности изучения нового материала. Это достигается включением в содержание повторения ранее изученного материала, который будет существенно использоваться при изучении нового. Таким образом, основное различие между указанными видами повторения заключается в их организации. Повторение в начале учебного года обычно требует выделения на него нескольких уроков (не более двух-трех), а на текущее повторение время выделяется на уроках изучения нового материала. Поэтому наиболее распространенной формой организации текущего повторения являются устные упражнения и самостоятельные работы с быстрой проверкой.

Однако и повторение в начале учебного года, и текущее повторение имеют свои особенности.

Повторение в начале учебного года

Как уже было отмечено выше, для определения содержания повторяемого материала необходимо выделить вопросы из ранее изученных, которые потребуются при изучении нового материала в ближайшее время. Первая тема курса алгебры и начал анализа — «Действительные числа. Числовые функции». В самом содержании этой темы уже заложено повторение. В учебном пособии разъяснение нового материала проходит с серьезной опорой на ранее изученный материал, причем этот материал часто приводится прямо в тексте. Поэтому может показаться, что специального повторения перед изучением этой темы и не требуется. Однако здесь нужно учесть одну из особенностей IX класса. Нередко девятые классы комплектуются заново, да и вести их начинает новый учитель. Поэтому перед учителем встает задача — познакомиться с учащимися. Удобно это сделать при повторении ранее изученного материала, так как при организации изучения нового материала учитель уже должен знать особенности того класса, в котором он преподает. Знакомство с учащимися предполагает выяснение уровня их математической подготовки. За два-три урока в полной мере это, разумеется, сделать невозможно. Но можно пойти по такому пути: отобрать из курса восьмилетней школы вопросы, наиболее тесно связанные с содержанием первой темы IX класса, включить эти вопросы в содержание повторения и тем самым в какой-то степени определить, насколько подготовлены учащиеся к изучению нового, каков уровень подготовки учащихся по выделенным вопросам.

Наиболее удобно с точки зрения выяснения уровня подготовки класса отбирать вопросы, каким-то образом связанные между собой, характеризующие знания учащихся «по одной линии» курса восьмилетней школы. Учитывая содержание первой темы IX класса, целесообразно выбрать функциональную линию:

1) Укажите, какие из данных соответствий между множествами X и Y являются функциями (см. рис. 2).

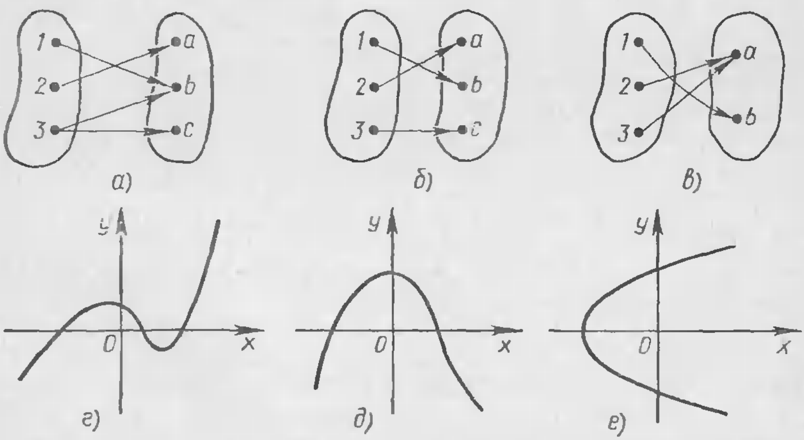


Рис. 2

2) Для каждого из графиков функций, изображенных на рисунке, укажите формулу, задающую эту функцию, выбрав ее из перечисленных:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = -0,5x$; в) $y=2x^2$; г) $y = -x^2$; д) $y=\frac{1}{x^2}$.

е) $y = -\frac{1}{x}$; ж) $y = \frac{1}{x^2}$; з) $y=\lg x$; и) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(к этому заданию должны быть приложены рисунки с графиками указанных функций).

3) Постройте графики функций: а) $y = 3x + 1$; б) $y = 2x^2$; в) $y = x^3$; г) $y = 2^x$; д) $y = \lg x$; е) $y = x^2 - x - 6$.

4) Для функций, графики которых построены в предыдущем задании, укажите промежутки возрастания и промежутки убывания.

5) Докажите, используя определение функции, возрастающей на множестве, что функция $y = 3x + 1$ возрастает на множестве всех действительных чисел.

6) Задайте формулой функцию, обратную данной:

а) $y = 5x$; б) $y = -2x$; в) $y = \frac{4}{x}$, где $x > 0$; г) $y = x^2$, где $x \geqslant 0$; д) $y = x^2$, где $x < 0$.

Конечно же, приведенный набор упражнений не отражает в с е х сведений о функциях, с которыми учащиеся познакомились в курсе алгебры восьмилетней школы. Но при выполнении даже этих упражнений учитель может довольно точно установить уровень владения определенными умениями и наличие определенных знаний.

В начале учебного года в любом классе полезно вспомнить некоторые правила, теоремы, формулы, алгоритмы и т. п., необходимые всегда, например: алгоритм решения линейных уравнений и неравенств, квадратных уравнений, формулы сокращенного умножения, правила действий со степенями и т. д. Конечно, вряд ли имеет смысл делать эти факты объектом специального повторения, но повторительные упражнения должны быть составлены так, чтобы эти важные формулы, правила, теоремы, алгоритмы использовались учащимися. Безусловно, одноразового повторения этих вопросов (только в начале учебного года) недостаточно. Этот материал должен постоянно подкрепляться в памяти учащихся. Но это уже задача текущего повторения.

В упражнения, которые будут предлагаться учащимся при повторении в начале IX класса, полезно включить упражнения пропедевтического характера. Для успешного разъяснения смысла понятий предела и непрерывности функции в точке необходимо, чтобы у учащихся был запас функций, графики которых не являются непрерывными линиями. С такими функциями учащиеся встречались в курсе восьмилетней школы, но не очень часто. Задания могут быть такими:

«Построить графики функций: $y = \frac{|x|}{x}$; $y = \frac{x^2}{x}$; $y = \frac{x^3}{x}$;

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}; \quad y = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{при } x \neq 5 \\ 7 & \text{при } x = 5 \end{cases}$$ ». И т. д.

Текущее повторение

Как уже отмечалось, текущее повторение — это обновление в памяти ранее изученного материала не на специально отведенных для этой цели уроках, а параллельно с изучением нового материала.

Текущее повторение имеет две основные функции: предупредить забывание важного, с той или иной точки зрения, материала и обеспечить потребности изучения нового материала. Поэтому материал, который предполагается повторить, должен удовлетворять хотя бы одному из двух требований: быть полезным при изучении нового материала или быть важным с точки зрения математической культуры человека. Когда речь идет о полезности при изучении нового материала, то под новым материалом не обязательно понимается именно тот, который будет изучаться непосредственно вслед за повторением. Вполне возможно, что повторяемый материал пригодится лишь через месяц, а может быть, и позже. Но откладывать повторение до этого времени не всегда можно. Дело в том, что предупреждение забывания какого-либо материала требует гораздо меньше времени и сил, чем восстановление в памяти уже забытого. Поэтому одной из важных задач текущего повторения является именно предупреждение забывания материала, т. е. постоянное подкрепление его в памяти учащихся. Это относится и к тому материалу, который будет использоваться при изучении нового, и к тому, который с этой целью использоваться не будет, но важен с точки зрения общего образования.

Таким образом, один и тот же материал должен повторяться довольно часто. К сожалению, нет возможности вместо «довольно часто» дать более конкретные рекомендации*. Частота возвращения к одним и тем же вопросам курса зависит от многих причин, связанных как с характером материала, так и с особенностями конкретного класса, например от уровня усвоения данного вопроса во время его изучения, от того, насколько часто этот вопрос встречался при изучении нового материала или при повторении, от того, что это за материал — несложный алгоритм или определение сложного понятия.

---

* Пример реализации текущего повторения свойств показательной функции см. в статье Ю. Б. Великанова и Е. Г. Глаголевой.

Повторяемый материал может быть непосредственно связан с изучаемым материалом, а может быть и не связан. В первом случае могут быть две возможности: требуется специальное повторение или, наоборот, изучение нового материала само способствует повторению. Зависит это в основном от уровня знаний учащихся. Рассмотрим пример. В курсе IX класса рассматривается вопрос о решении квадратичных неравенств с использованием зависимости расположения графика квадратного трехчлена от знаков его дискриминанта и коэффициента при x^2. С этим новым материалом непосредственно связаны изученные в восьмилетней школе вопросы: нахождение дискриминанта квадратного трехчлена, выяснение вопроса о наличии и числе корней квадратного уравнения в зависимости от значения дискриминанта, нахождение корней квадратного уравнения по формуле, определение направления ветвей параболы — графика квадратного трехчлена — по знаку коэффициента при x^2.

Построение урока, посвященного решению квадратичных неравенств, зависит от того, насколько учащиеся владеют перечисленными умениями. От этого зависит, нужно ли повторять эти вопросы специально до изучения нового материала или, наоборот, в процессе изучения нового материала все перечисленные вопросы будут освежены в памяти учащихся, т. е. изучение нового материала будет работать на повторение.

Если же необходимо повторить материал, не связанный с изучаемым (напомним, что это может быть в двух случаях: или этот материал будет использоваться в дальнейшем при изучении нового, или он важен сам по себе и все учащиеся должны его помнить), то без специального повторения не обойтись. Такое повторение может быть организовано в разных формах, но с точки зрения рационального использования времени урока наиболее удачной формой являются так называемые устные упражнения, а точнее, упражнения, которые выполняются фронтально со всем классом.

Для поддержания в памяти учащихся особенно важных вопросов, знание которых может понадобиться в любой момент времени, удобно использовать и небольшие самостоятельные работы. Так, несомненно, что в старших классах учащиеся всегда должны уметь решать квадратные уравнения. Однако система упражнений в учебных пособиях (особенно в первой половине пособия для IX класса) составлена так, что с квадратными уравнениями учащиеся встречаются редко. Поэтому время от времени полезно предлагать учащимся самостоятельные работы такого типа: «Решите уравнения: а) $x^2 + 3x - 10 = 0$, б) $x^2 = 7x$, в) $x^2 = 5$».

Отметим еще одну особенность текущего повторения. Выше уже говорилось о том, что материал должен повторяться систематически. Но если такое повторение будет проводиться при выполнении однотипных заданий, то может возникнуть опасность, что у учащихся о повторяемом материале сложится одностороннее представление. Это затруднит формирование полного представления об изученном материале и установление взаимосвязей между отдельными вопросами курса при заключительном повторении. Так, например, при повторении правила нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке полезно предлагать учащимся не только упражнения, в которых нужно найти наибольшее и наименьшее значение данной функции на заданном промежутке, но и задачи с геометрическим содержанием (типа упр. 1784—1794 учебного пособия для IX и X классов) и задачи с «жизненными ситуациями» (типа упр. 359, 414, 419, 1795—1799 учебного пособия для IX и X классов).

С этой же точки зрения полезны различные формулировки одного и того же задания, например: «Решите неравенство $|x-2| < 0,3$», «Укажите множество значений x, удаленных от числа 2 менее чем на 0,3» и «Укажите множество значений x, лежащих в окрестности числа 2 радиуса 0,3»; или «$F'(x) = 3x^2 + 3x - 2$, $F(1) = 4,5$. Найдите $F(x)$» и «Найдите для функции $f(x) = 3x^2 + 3x - 2$ первообразную, график которой проходит через точку $(1; 4,5)$»; или «Найдите значение производной функции $f(x) = 2x^4 - 7x + 4$ при $x = 1$» и «Определите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2x^4 - 7x + 4$ в точке с абсциссой $x = 1$».

Остановимся теперь подробнее на содержании повторительных упражнений, непосредственно подготавливающих учащихся к изучению нового материала. Рассмотрим такие упражнения, которые можно использовать при изучении темы «Первообразная и интеграл» в X классе.

Приведем примеры таких упражнений, сгруппировав их по отдельным вопросам этой темы. Учитель сам должен решить вопрос о целесообразности использования того или иного упражнения в зависимости от уровня подготовки конкретного класса, а также вопрос о форме проведения повторения: устные упражнения, фронтальное обсуждение решения, самостоятельная работа (с быстрой проверкой) и т. п.

Первообразная

1. Преобразуйте в выражения, содержащие степени с рациональными показателями:

а) $\sqrt[5]{x^4}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{x^7}}$;

в) $\sqrt{x}\,(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3})$; г) $\dfrac{\left(\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}\right) \cdot \sqrt[4]{x^5}}{\sqrt{x^3}}$.

2. Найдите производные функций:

а) $f(x) = 7x^6 + 3x^5 - 21x^4 + 17x + 6$;

б) $g(x) = \sqrt[5]{x^4} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$;

в) $h(x) = \frac{5x^2 - 3}{x + 2}$;

г) $u(x) = (x^2 + 1) \cdot \sin x$;

д) $v(x) = 3 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

Уверенное выполнение предложенных упражнений учащимися будет свидетельствовать о том, что они подготовлены к изучению вопроса о первообразной функции, в том смысле, что при разборе теоретического текста этого пункта и выполнении упражнений к нему у учащихся не должно возникнуть дополнительных трудностей, связанных не с новым материалом, а с материалом, изученным ранее. Необходимость выполнения первого упражнения станет понятна, если обратить внимание на то, что из пяти обязательных упражнений к этому пункту, в которых требуется доказать, что одна из заданных функций является первообразной для другой, четыре содержат функции, заданные формулами с радикалами. Упражнение 2 способствует восстановлению у учащихся навыков дифференцирования. Эти навыки вполне могли быть утеряны, так как большой отрезок времени до изучения темы «Первообразная и интеграл» учащиеся занимались тождественными преобразованиями тригонометрических выражений, решением тригонометрических уравнений и неравенств. При выполнении этого упражнения учащиеся имеют возможность вспомнить формулу для нахождения производной функции $y = x^r$, где $r \in Q$, а также правила дифференцирования суммы, произведения и частного функций. При желании учитель может добавить, например, функцию $y = (2x+3)^{11}$, для нахождения производной которой необходимо вспомнить правило дифференцирования сложной функции.

Основное свойство первообразной

1) Что вы можете сказать о графике функции f в некоторой окрестности точки 3, если известно: а) $f'(3) > 0$; б) $f'(3) < 0$; в) $f'(3) = 0$? Существует ли в этих случаях касательная к графику функции в точке с абсциссой 3? Что можно сказать о расположении касательной относительно оси абсцисс?

2) Постройте график функции, имеющий горизонтальные касательные в: а) одной точке; б) двух точках; в) трех точках.

3) Постройте схематически графики функций:

а) $f(x) = x^2$; $f_1(x) = x^2 + 3$; $f_2(x) = x^2 - 4$;

б) $f(x) = x^3$; $f_1(x) = x^3 - 1$; $f_2(x) = x^3 + 2$;

в) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $f_1(x) = \frac{1}{x^2} - 1$; $f_2(x) = \frac{1}{x^2} + 4$.

4) Используя график функции $y = f(x)$ (см. рис. 3), постройте графики функций: а) $y = f(x) + 3$; б) $y = f(x) - 5$; в) $y = |f(x)|$.

5) График функции $y = 2x + b$ проходит через точку с коор-

динатами (—3; 0). Найдите значение b.

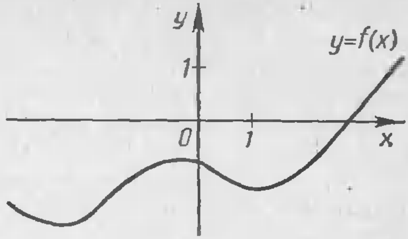


Рис. 3

Первые два упражнения направлены на то, чтобы помочь учащимся вспомнить смысл термина «касательная» и связь касательной со знаком производной, точнее, с ее значением. Это необходимо для того, чтобы учащиеся поняли приводимые в учебном пособии рассуждения о том, что если производная функции в каждой точке некоторого интервала равна нулю, т. е. в каждой точке этого интервала график функции имеет горизонтальную касательную, то функция обязательно будет постоянной на всем данном интервале.

Упражнения 3 и 4 облегчат учащимся понимание геометрического смысла основного свойства первообразной. Дело в том, что учащиеся давно не встречались в курсе с графиками функций вида $f(x) + a$ и построением их из графика функции $f(x)$.

Упражнение 5 напомнит учащимся, что слова «график функции проходит через точку» означают, что при подстановке координат точки в формулу, задающую функцию, получается истинное равенство. Это необходимо знать для того, чтобы выполнить упражнения, в которых нужно найти первообразную, график которой проходит через заданную точку. В том случае, если у учащихся возникли трудности с дифференцированием функций, то к перечисленным упражнениям можно добавить одно-два на нахождение производной.

Три правила нахождения первообразной

Перед изучением этого пункта особое внимание следует уделить повторению правил нахождения производной, на использовании которых будет основываться доказательство всех трех правил нахождения первообразной. Поскольку правила дифференцирования суммы, произведения и частного функций были уже повторены в связи с изучением предыдущих пунктов, здесь наибольшее внимание должно быть уделено повторению правила дифференцирования сложной функции. Причем особенно в том случае, когда внутренняя функция линейная. Набор функций, производные которых нужно найти, может быть, например, таким:

а) $f(x) = 5\sqrt{x^3} + x \operatorname{tg} x$; б) $g(x) = (3x - 7)^6$;

в) $h(x) = \dfrac{1}{(3-2x)^2}$; г) $u(x) = \sqrt[3]{(5x-1)^2}$;

д) $w(x) = \sin(x^2 + 2)$.

Возможно, что полезно будет предварительно вспомнить с учащимися само понятие сложной функции, особенно выделение в сложной функции $y = f(g(x))$ внутренней функции g и внешней f. Без прочного умения производить такое выделение внутренней и внешней функций учащиеся не могут осознанно применять правило дифференцирования сложной функции. Полезно выполнить такое упражнение: «В каждом из случаев укажите внутреннюю и внешнюю функции

а) $x \to (x^3 + 2)^7$; б) $x \to \frac{1}{(5 - 7x)}$;

в) $x \to \sqrt{(x + 7x^2)^4}$; г) $x \to \frac{7}{\sqrt[5]{(3 - x)^6}}$;

д) $x \to \sin(5 - x)$; е) $x \to \operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi - x\right)$.

Площадь криволинейной трапеции

Для понимания разобранного в теоретической части пункта примера нахождения площади криволинейной трапеции нужно, чтобы учащиеся знали определение производной функции. Вспомнить это определение можно по-разному: можно предварительно задать учащимся на дом повторить определение производной (по учебнику для IX класса, по тетради или по разделу «Материал для повторения» учебного пособия для X класса) и этим ограничиться, а можно после этого предложить учащимся упражнение: «Используя определение производной, найдите производную функции $y = 2x^2 - 5$». Второй путь более предпочтителен, так как повторение лишь теории не всегда приводит к желаемому результату — пониманию, а проверить, понимает ученик или нет, что такое производная, можно, пожалуй, лишь при выполнении упражнений, подобных предложенному. Ведь правильный ответ на вопрос, что такое производная, как уже отмечалось выше, еще не свидетельствует о понимании, ученик мог выучить определение, не понимая его совсем или не понимая отдельных слов в нем (как это нередко бывает).

При выполнении упражнений к этому пункту и в дальнейшем учащимся, прежде чем вычислить площадь некоторой фигуры, придется выполнять рисунки. В основном на этих рисунках будут графики изученных ранее функций. Поэтому необходимо, чтобы у учащихся формула определенного вида связывалась с конкретным видом графика. В противном случае могут возникнуть трудности, которые будут мешать правильному выполнению упражнений на вычисление площадей фигур. Предлагаемые учащимся повторительные упражнения могут быть двух типов: на узнавание и на построение. Вероятно, выполнение упражнений второго типа полезнее, но на это тратится достаточно много времени, а вот задачи «на узнавание» могут быть выполнены при фронтальной работе с классом в процессе устных упражнений. Приведем пример такой задачи:

«На рисунке изображены графики функций. Для каждого из графиков подберите соответствующую формулу из следующих: а) $y = 2x$; б) $y = 2x - 2$; в) $y = 2x^2$; г) $y = x^3$; д) $y = \sqrt{x}$; е) $y = \sin 2x$; ж) $y = 2 \cos x$; з) $y = (x + 3)^2$; и) $y = x^2 - 3$».

Сами графики могут быть изображены на доске, могут быть спроектированы на доску с помощью кодоскопа или просто предложены учащимся на отдельном листке бумаги. При этом, разумеется, на рисунке графики должны быть взяты в другой последовательности и не обязательно это должны быть графики всех функций, формулы для которых приведены в списке.

Для построения можно предложить учащимся такой набор графиков: а) $y = 2x + 3$; б) $y = x^2 + 5$; в) $y = (x - 3)^2$; г) $y = \sqrt{x}$; д) $y = \sqrt[3]{x}$; е) $y = \sin x$; ж) $y = 3 \cos x$.

Формула Ньютона — Лейбница

Так как $F(b) - F(a)$ — приращение первообразной, то полезно, чтобы учащиеся вспомнили понятие приращения функции. С этим понятием учащиеся сталкивались недавно, когда повторяли определение производной. Однако, наверно, не лишним будет такое упражнение: «Найдите приращение функции $f(x) = 3x^2$, соответствующее приращению аргумента от $x_0 = 3$ до $x = 5$».

Среди упражнений к этому пункту, а также среди дополнительных упражнений к главе есть такие, в которых нужно вычислять площадь фигуры, не являющейся криволинейной трапецией. В этом случае зачастую приходится находить точки пересечения графиков функций. Конечно, желательно, чтобы эти точки учащиеся умели находить не только по чертежу, но и могли показать аналитический путь нахождения координат этих точек — решение системы уравнений. Упражнения, способствующие этому, могут быть такими:

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = 3x + 2, \\ y = -x + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 + 4, \\ y = 2x + 3. \end{cases}$

2. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 2x$ и $y = x^2$;

б) $y = \frac{4}{x}$ и $y = -x + 5$; в) $y = \frac{1}{x^2}$ и $y = x^2$.

В этом разделе курса алгебры и начал анализа полезно повторить геометрические формулы для вычисления площадей треугольников и трапеций. Это связано с тем, что желательно, чтобы учащиеся не усложняли себе жизнь, вычисляя площадь треугольника ($y = 0$, $x = 0$, $x + y = 5$) или трапеции ($y = x + 2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$) с помощью интеграла.

З. И. Моисеева

ПРОВЕРКА, ОЦЕНКА И УЧЕТ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ

1. О роли проверки и оценки знаний учащихся

В данной статье не ставится задача детально разобрать общие положения о роли и месте проверки и оценки знаний учащихся в общей системе учебно-воспитательного процесса. Они известны из педагогической и методической литературы. Здесь будут отмечены лишь некоторые наиболее важные из них применительно к преподаванию курса алгебры и начал анализа.

Практика показывает, что еще многие учителя или недооценивают факторов контроля в деле обучения и воспитания школьников, или не владеют в должной мере эффективными приемами и методами проверки и оценки знаний учащихся. Известно, что опрос (письменный или устный) является основным средством «обратной связи» в системе «учитель — ученик». Без него невозможно никакое управление учебным процессом, а следовательно, и сколько-нибудь зримое продвижение вперед.

Хорошо поставленный контроль позволяет учителю не только правильно оценить уровень усвоения учащимися изучаемого материала, но и увидеть свои собственные удачи и промахи. По результатам проверки знаний учитель вносит необходимые коррективы и в свою работу, и в работу питомцев. Своевременная и правильно поставленная проверка знаний учащихся имеет и большое воспитательное значение, так как способствует развитию у детей чувства ответственности за порученное дело, воспитывает активность и инициативу, способствует организации детского коллектива.

Опрос необходим не только учителю, но и учащемуся. При правильно поставленном контроле ученик видит плоды своего труда, взвешивает результаты своих усилий. Своевременная проверка знаний дает возможность учащемуся составить представление о степени усвоения им пройденного материала, о достижениях и пробелах в учении. Это особенно важно для старшеклассников, так как помогает им судить об уровне знания предмета, о той базе, которая ими получена в результате обучения математике в школе, и вообще об их математическом развитии. А это имеет очень большое значение не только для успешного окончания школы, но и для правильного выбора школьником дальнейшего жизненного пути.

Кроме того, как показывает практика, в старших классах учитель часто получает новый класс, который или пришел из соседней восьмилетней школы, или в этой же школе его выпустил учитель, который не работает в старших классах. Тогда проверка знаний вместе с повторением пройденного служит средством «узнать» учащихся.

Как правило, контроль носит индивидуальный характер. Однако важно иногда оценить успеваемость класса в целом, особенно в тех случаях, когда учитель хочет установить, верно ли им выбран темп урока, понимают ли его дети. Он в таких случаях вызывает двух-трех учащихся и по их ответам судит об усвоении материала классом. В этих случаях ответы не оцениваются, а лишь служат средством обратной связи. Обычно этот прием учитель использует при объяснении нового материала (в старших классах особенно при проведении уроков-лекций).

Что касается индивидуальной проверки знаний учащихся, то она должна вестись систематически, т. е. на каждом уроке и по заранее составленному учителем плану. В той или иной форме она должна проводиться и при проверке домашнего задания, и при объяснении нового материала, и при закреплении только что пройденного. В зависимости от цели урока проверка может предварять тему урока, являясь как бы подготовкой к данному уроку; являться сопутствующим элементом при изучении новой темы; служить завершающим элементом урока. Отдельные уроки полностью посвящены проверке знаний, это уроки контрольных работ (письменных и устных), уроки-зачеты и др. Уроки таких типов, как правило, проводятся по окончании изучения какой-то темы курса (или какой-то подтемы, если тема большая), а также в конце четверти (полугодия).

Несколько слов об особенностях проверки знаний старшеклассников. В младших классах интересы учащихся еще не определились, и для детей этого возраста одним из основных стимулов активной работы на уроке и во внеурочное время является оценка их знаний учителем. Отсюда их активность на уроке, особенно при фронтальном опросе, когда они хотят получить хорошую оценку на уроке. Нередко любовь к предмету зависит у них от умения учителя организовать эту работу.

В старших классах интересы уже в основном определились, произошла дифференциация учащихся и по степени усвоения ими того или иного предмета, и по призванию. Здесь учителю важно поддержать возникший интерес и помочь ученику достичь больших результатов в соответствии с возможностями. При работе с сильными учащимися нет надобности часто опрашивать их устно. Важно постоянно руководить их работой. Для контроля же за их знаниями достаточно письменных работ и редких, но обстоятельных опросов по теме или каким-то наиболее важным разделам темы. Другое дело учащиеся, которые имеют скромные успехи, а иногда и откровенно слабые знания по данному предмету. Как правило, эта наука их не интересует и рассчитывать на постоянную и систематическую работу таких учащихся учителю не приходится. В таких случаях долг педагога — заставить этих детей постоянно работать. Большую помощь оказывает при этом учителю систематическая, если не сказать ежедневная, проверка знаний слабых учащихся. Повышенное внимание к таким детям помогает им организовываться и в итоге способствует ликвидации пробелов по предмету, а с ней и возникновению интереса к изучаемому в курсе.

2. Об учете знаний учащихся

Письменная проверка знаний учащихся почти во всех республиках регламентируется документально. Число письменных работ по предметам математического цикла, а также число работ, которое может быть проведено в день в одном классе, определено или приказом, или циркулярным письмом. Поэтому необходимый минимум контрольных работ, как правило, во всех школах соблюдается. Исключения редки.

С устной проверкой знаний дело обстоит иначе. Здесь в большинстве случаев учителю предоставлена полная свобода. И у учителя, который правильно понимает цели и задачи контроля за знаниями учащихся и умеет хорошо организовать эту работу, учет знаний поставлен хорошо и в классе, как правило, полная успеваемость. Административные проверки обычно подтверждают оценки учителя.

В практике работы школ, к сожалению, приходится наблюдать, что даже у опытных учителей, дающих хорошие уроки, учет знаний поставлен, оказывается, плохо. Особенно редко опрашиваются слабо успевающие школьники, еще реже те, кто имеет четвертную (полугодовую) оценку «2».

Как правило, таким учащимся выставляются оценки за письменные работы и одна-две оценки в течение четверти за устный ответ. А бывают случаи, и, к сожалению, не единичные, когда такие дети опрашиваются устно раз в четверть, а то и в полугодие.

В частной беседе учитель обычно ссылается на крайне слабые знания этих детей, утверждая, что опрашивать их бесполезно. Дескать, придется на каждом уроке ставить «двойку». Пытаешься выяснить, что же именно не знает данный ученик. Просишь, наконец, назвать ошибки, которые допустил он хотя бы в последней контрольной работе или при последнем устном ответе. Учитель, оказывается, не может назвать их, так как он не ведет учета пробелов в знаниях своих подопечных, а потому не может назвать ошибки, которые допускают его питомцы. Оценки, выставленные в журнал, носят у такого учителя во многом случайный характер и не дают полного представления о знаниях учащихся.

Как известно, для того чтобы обучение было максимально эффективным, учитель, особенно старших классов, должен хорошо знать своего ученика, его сильные и слабые стороны, его пробелы и достижения. Индивидуализация обучения или, как ее еще называют, дифференцированный подход при обучении, если это не разговор, а реальность, предполагают строгий индивидуальный учет всех видов деятельности учащегося и их результатов. Только в этом случае обучение будет по-настоящему действенным.

В ряде республик регламентируется не только норма проведения письменных работ, но и учет знаний учащихся. Например, Министерством просвещения Казахской ССР приказом № 51 от 1 марта 1977 года «О мерах повышения качества знаний, умений и навыков учащихся школ республики» поручено каждому учителю осуществлять тематический учет знаний учащихся. Этим же приказом институты усовершенствования учителей обязаны, изучив опыт передовых учителей, разработать рекомендации по осуществлению поэлементного анализа знаний, умений и навыков учащихся и внедрить их в практику работы школы.

Такая работа лучшими учителями математики проводится давно, накоплен значительный опыт в этом направлении. Учителя применяют разные формы учета знаний. У одних это специальные тетради-журналы учета, у других — лицевые счета учащихся, у третьих — карточки учета. Но суть их одна: в них, как правило, заносятся существенные ошибки, допущенные учеником в контрольных и самостоятельных работах, при устных ответах. Некоторые учителя туда же записывают дополнительные задания, срок их выполнения и качество их выполнения и др.

Систематическая регистрация учителем тех или иных пробелов и ошибок, допущенных учащимся, заставляет последнего серьезно относиться к каждому замечанию учителя, дисциплинирует школьника.

Ведение такого учета способствует организации своевременной работы ученика над устранением обнаруженных пробелов с помощью индивидуальных консультаций, дополнительных занятий. В этом большую помощь учителю оказывает актив из числа наиболее успевающих учащихся класса. Прикрепление более сильных учащихся к слабо успевающим полезно и тем и другим.

Как же вести тетради-журналы учета? Бывает, что учитель ведет две тетради: в одной учитываются результаты устных ответов, в том числе и с мест, в другой — результаты письменных работ и зачетов. Некоторые ведут одну тетрадь и в ней записывают результаты всех видов деятельности ученика. При выборе формы учета знаний предпочтение следует, думается, отдать той форме, при которой учитываются фактические знания ученика. Некоторые суждения по этому поводу высказаны на страницах журнала «Математика в школе» № 3 за 1979 год (с. 30—31), а также в статье Е. Г. Глаголевой «Особенности преподавания алгебры и начал анализа в общеобразовательной школе», помещенной в этом сборнике (с. 8).

Думается, что заслуживает внимания учет знаний учащихся, когда учитель ведет его в одной тетради и по темам. Делается это так: на первой странице выписаны названия всех тем и число часов, отводимое на них. Затем указаны по каждой теме контрольные и самостоятельные работы, зачетные уроки и сроки их проведения. Далее, на двойном листе, как в журнале, справа записываются учащиеся в алфавитном порядке (на остальных листах отрезается часть листа, равная ширине списка). Сверху записывается название темы, несколько ниже записываются вопросы по данной теме, на которые должен ответить каждый ученик класса. Против фамилии ученика в соответствующей клетке ставится знак «+», если учащийся сформулировал нужную теорему, признак или определение, смог привести соответствующий пример. Некоторые учителя ставят за ответ оценку («двойка» не выставляется) или вводят какие-то иные условные обозначения.

Если тема большая, ее делят на несколько подтем. Например, в теме II курса алгебры и начал анализа IX класса «Производная и ее применение» рассматриваются такие вопросы, как возрастание и убывание функции, производная функция, выводятся производные ряда функций по определению, даются правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций, рассматриваются геометрический и физический смысл производной, применение производной к исследованию функций и другие вопросы.

Ниже приведены вопросы, на которые должен ответить каждый ученик класса, по теме «Производная и ее применение».

На следующей странице тетради по этой же теме записывается анализ выполнения контрольной, а если есть, то и самостоятельной работы. Список учащихся уже записан (часть листа отрезается), сверху пишется название и номер работы, дата ее выполнения и возможные ошибки, допущенные при ее выполнении, т. е. проводится поэлементный анализ выполнения работы.

Приводим текст и схему анализа контрольной работы по алгебре и началам анализа для IX класса:

1. Найдите производную функции

$$f(x)=\frac{x^5+13}{7x+1}.$$

2. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-3x^2$ на монотонность и экстремумы и постройте ее график.

3. Тело движется прямолинейно по закону $s(t)=7t^2+2t+1$ (расстояние измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите скорость движения тела в момент $t=3$ с.

Пусть это будет контрольная под номером 5 (см. с. 120).

В графе «Работа над ошибками» указываются номера параграфов, которые нужно повторить, номера упражнений и к какому сроку должен это выполнить ученик. В графе «Отметка о выполнении» указывается срок выполнения работы над ошибками.

Ясно, что такой поэлементный тематический анализ знаний учащихся — дело довольно кропотливое, но оно вполне оправды-

	Фамилия, имя ученика / Тема	Иванов О.	Тросько А.
Производная и ее применение	числовая функция	+	+
	возрастание (убывание) функции на множестве	+	
	приращение функции		+
	определение производной функции в точке	+	+
	производная суммы двух функций	+	
	производная произведения двух функций	+	+
	производная частного двух функций	+	+
	производная x^n при $n \in Z$		+
	производная сложной функции (правило)	+	
	геометрический смысл производной (касательная)	+	
	производная — скорость изменения функции		
	достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале		+
	критические точки	+	+
	точки максимума (минимума) функции	+	+
	достаточное условие экстремума	+	+
	правило исследования функции на монотонность и экстремумы (схема)		+

Тема			Фамилия, имя ученика	Тросько А.	Разоренов М.
Контрольная работа № 5	Задание № 1		Выполнено полностью	+	—
		допущены ошибки	в формуле производной частного	—	+
			при нахождении производной многочлена	—	—
			в тождественных преобразованиях	—	+
	Задание № 2		Выполнено полностью	—	—
		допущены ошибки	при нахождении производной	—	
			при нахождении критических точек	+	—
			при нахождении промежутков монотонности	—	—
			при определении характера монотонности	—	—
			при определении типа экстремума	+	+
			при построении графика	—	+
	Задание № 3	допущены ошибки	Выполнено полностью	+	—
			при нахождении производной	—	—
			при вычислении производной	—	—
			не знает, что для решения задачи нужно найти производную	+	
			Оценка за работу	4	3
			Работа над ошибками		
			Отметка о выполнении		

вает себя и позволяет учителю и ученику составить довольно точную картину о знаниях последнего. При таком учете учитель уже не скажет учащемуся, готовящемуся к контрольной работе или зачету: «Учи все», а назовет вопросы, которые действительно данный школьник должен доработать. А ученик, получив посильное конкретное задание, сможет его выполнить к намеченному сроку. Облегчается при этом задача и учителю и ученику при подведении итогов изучения темы, да и курса в целом.

Кроме того, как показывает практика, когда старшеклассники знают конкретно свои грехи, они стремятся побыстрее их ликвидировать, используя при этом помощь товарищей и учителя.

3. О проверке домашнего задания

Проверка выполнения домашнего задания в той или иной форме, за редким исключением, присутствует на каждом уроке. Роль домашних заданий практически обесценивается, если не налажена их проверка. Прежде всего должен проверяться сам факт выполнения заданий. Учителя практикуют разные формы учета. Если это письменная работа, то учитель проверяет или сам, или это вменяется в обязанность дежурным, ответственным из учебной группы класса, или специально назначенным учителем ученикам. В старших классах многие учителя добиваются, что учащиеся сами ведут учет своих пробелов. Как правило, у таких учителей учащиеся не скрывают факт невыполнения домашней работы и говорят учителю, что по такой-то причине он не смог сегодня выполнить домашнего задания или какой-то его части. В этом случае назначается новый срок выполнения домашней работы. Важно при этом не наказывать ученика, а проследить, чтобы он действительно выполнил задание и отчитался в выполнении этой работы.

После того как факт выполнения задания установлен, учитель проверяет качественную сторону выполнения домашнего задания.

Очень распространен такой прием: учитель предлагает вызванным ученикам зачитать решение указанной задачи или примера. Такой прием возможен лишь при проверке небольшого задания. Если же упражнение большое, то зачитывать его решение неэффективно, если не сказать, бесполезно. Это связано с тем, что учащиеся, которые не справились с этим упражнением, быстро теряют нить и такая проверка для них просто трата времени. В случае большого задания часто практикуется совмещение проверки этого задания с опросом, и в этом случае она является продолжением обучения. Некоторые учителя вызывают к доске одного-двух учащихся (в зависимости от объема и характера задания) и предлагают им записать решение того или иного упражнения домашней работы на доске. Затем обсуждается с ними ход решения и его результат.

При проверке домашней работы важно заранее наметить вопросы и проверку вести в плане этих вопросов.

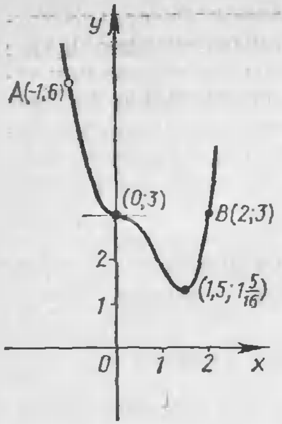


Рис. 1

Например, при изучении темы «Схема исследования функции» задано на дом упражнение: «Исследуйте функцию $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$ и постройте ее график» (рис. 1). На доске выписывают текст решения упражнения, если нельзя его спроектировать:

1) Найдем область определения функции: $]-\infty;\ \infty[$.

2) Найдем ее производную: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$.

3) Найдем критические точки:

$f'(x) = 0,\ 2x^2(2x - 3) = 0;\ x = 0$ или $x = 1{,}5$.

4) Найдем интервалы монотонности:

$f'(x) > 0;\ 2x^2(2x - 3) > 0;\ 2x - 3 > 0,\ x > 1{,}5$ — функция возрастает;

$f'(x) < 0,\quad (2x - 3) < 0,\quad x < 1{,}5$ — функция убывает.

Заполним таблицу:

	$]-\infty; 0[$	0	$]0;\ 1{,}5[$	1,5	$]1{,}5;\ \infty[$
$f'(x)$ $f(x)$	$-$ ↘	0 3	$-$ ↘	0 $1\frac{5}{16}$	$+$ ↗
				min	

Возьмем контрольные точки: $x = -1$ и $x = 2$:

$f(-1) = 6,\ f(2) = 3;$
$A(-1;\ 6)$ и $B(2;\ 3)$.

При проверке домашней работы схему можно не выписывать полностью, ее полезно вывесить в классе. При проверке выполнения этого упражнения важно обратить внимание учащихся на то, что областью определения рассматриваемой функции является множество действительных чисел (функция многочлен), а также на умение находить критические точки.

При отыскании промежутков монотонности проверяется умение решать неравенства, можно здесь выяснить, какими теоремами пользовался ученик при нахождении решения неравенства и др.

Чтобы выставить оценку, учитель обычно задает учащемуся несколько дополнительных вопросов. Можно выбрать их из следующих вопросов:

1) Что называется функцией?

2) Какая функция называется монотонной? Приведите пример.

3) Дайте определение производной.

4) Какая точка называется точкой минимума (максимума)?

5) Сформулируйте достаточное условие экстремума.

Можно задать и другие вопросы, изученные в теме, например:

1) Что такое главная часть приращения функции?

2) Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 2$.

3) Решите неравенство $x^2 + 2x - 1 > 0$.

4) Нарисуйте схематически график функции $y = x^2 - 3x + 1$ и др.

Лучшим приемом проверки домашних заданий является просмотр собранных тетрадей.

4. О проверке тетрадей

В старших классах учащиеся ведут, как правило, общие тетради. О ведении тетрадей по математике напечатана статья К. И. Ш а л и м о в о й в журнале «МШ», № 1 за 1978 г. (с. 30). Отмечу лишь, что и в старших классах проверять тетради необходимо.

Норма проверки тетрадей в республиках обычно как-то регламентирована. В РСФСР, например, требования к проверке тетрадей учащихся старших классов таковы: ежедневно проверяются или просматриваются тетради только слабо успевающих учеников, а у остальных просматриваются периодически, но не реже двух раз в месяц.

Как правило, учитель берет с собой несколько тетрадей, проверяет и на следующий урок возвращает, отмечая их достоинства и недостатки. Некоторые учителя о ц е н и в а ю т ведение тетради и выставляют отметки в классный журнал. Тогда тетради учащихся, как правило, ведутся аккуратно и служат своего рода конспектом всего курса.

Просмотр тетрадей позволяет учителю выяснить, что́ из пройденного усвоено хорошо, что́ слабо, выявить учащихся, не справившихся с теми или иными упражнениями, и вовремя принять необходимые меры. Помимо учета пробелов в знаниях учащихся, проверка тетрадей важна и потому, что при этом учитель обучает детей правильному рациональному ведению записей.

5. О роли и оценке письменных работ при обучении математике

Большое место при проверке знаний, особенно по математике, отводится письменным работам. В математике, как, пожалуй, ни в каком другом предмете, важно, чтобы учащиеся не только знали в определенном объеме теоретический материал, но и умели применять его к решению задач и упражнений, обладали бы целым рядом навыков, например вычислительными навыками, навыками решения задач на составление уравнений, умели бы преобразовывать выражения, решать тригонометрические уравнения видов, определенных программой, и т. д. Очевидно, что умения и навыки могут быть по-настоящему проверены только в письменной работе.

В начальный момент формирования каких-то умений и навыков проводятся самостоятельные работы. Некоторые учителя сразу после объяснения нового материала дают самостоятельную работу. Это позволяет им увидеть, кто из учащихся и в какой мере понял содержание урока. Судя по количеству справившихся, учитель строит дальнейшую свою работу по-разному. Если справляется большинство, то он или его помощники объясняют материал тем, кто не усвоил. Если же не справляются многие, тогда учитель еще раз объясняет весь материал или начиная с той части, которая больше всего вызвала затруднения. Такие самостоятельные работы даются в двух вариантах, а иногда в одном, по содержанию они просты. При их выполнении разрешается пользоваться учебником.

Например, при изучении понятия «производная» большие трудности вызывает умение найти приращение функции.

Поэтому при изучении пункта учебника «Приращение функции» на этом уроке или в начале следующего необходима самостоятельная работа. Можно дать на этом уроке первую часть самостоятельной работы IV-2, варианты I и II из дидактических материалов по алгебре и началам анализа для IX класса, а именно: «Для функции $y = 2x + 1$ ($y = 5x - 4$) найти приращение Δx и Δy, если $x_0 = 2$ и $x = 2{,}5$ ($x = -2{,}2$ и $x_0 = -2$).»

В начале следующего урока на 5—7 мин предложить учащимся для самостоятельного выполнения работу: «Для функции $y = 3x^2 + 5x$ ($y = 5x^2 - 3x$) найти приращение функции Δy, если приращение аргумента Δx». Более сильным учащимся можно дать функцию $y = 4x^3 - 9x^2 + 6x$. Самостоятельные работы оцениваются, как правило, выборочно, неудовлетворительные оценки не выставляются, так как формирование проверяемого навыка только начато. Проведение таких работ дает учителю информацию о том, что часть класса в чем-то еще не разобралась или что все всё поняли. Выставление в журнале оценки за самостоятельную работу означает, что учащиеся этим материалом овладели. Если оценка ученику не поставлена, это означает, что он пройденное должным образом еще не усвоил.

По окончании темы, а если она большая, то какой-то ее части, проводится контрольная работа. В IX—X классах в течение полугодия должно быть проведено по алгебре и началам анализа не менее четырех контрольных работ. При оценке контрольных работ можно пользоваться примерными нормами оценки знаний и умений учащихся, которые напечатаны в журнале «Математика в школе» № 4 за 1978 г. (с. 30). Некоторую помощь окажет статья С. В. Кудрявцева и др., разъясняющая, как пользоваться нормами оценки, помещенная в № 3 того же журнала за 1979 г., а также статья Е. Г. Глаголевой в данном сборнике (см. с. 17).

Покажем на примере контрольной работы № 4 из дидактических материалов по алгебре и началам анализа для X класса, как пользоваться примерными нормами оценки знаний учащихся.

Рассмотрим вариант I.

№ 1. Найдите функцию $F(x)$, зная, что $F'(x) = 3x^2 - 2x$ и что $F(0) = 1$.

№ 2. Найдите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$

№ 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$; $y = 8$; $x = 0$.

Предполагается следующее выполнение этой работы:

№ 1. Если $F'(x) = 3x^2 - 2x$, то $F(x) = x^3 - x^2 + C$ (эта запись может быть более подробной). Из условия $F(0) = 1$ находим C: $F(0) = C$; значит, $C = 1$ и $F(x) = x^3 - x^2 + 1$.

$$№\ 2.\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos^2\frac{x}{2}\right) dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)\, dx = (x - \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} + 1.$$

№ 3. Построим фигуру, площадь которой требуется найти: $y = x^3$; $y = 8$; $x = 0$ (рис. 2).

Найдем точки пересечения графиков функций: $y = x^3$ и $y = 8$; $x^3 = 8$; $x = 2$. Это точка $P(2; 8)$.

$$s_{\text{ф}} = S\ \text{прямоугольника} - S_{\text{крив. трапеции}} = 2\cdot 8 - \int\limits_0^2 x^3 dx =$$

$$= 16 - \frac{1}{4}x^4\Big|_0^2 = 16 - \frac{1}{4}\cdot 16 = 16 - 4 = 12.$$

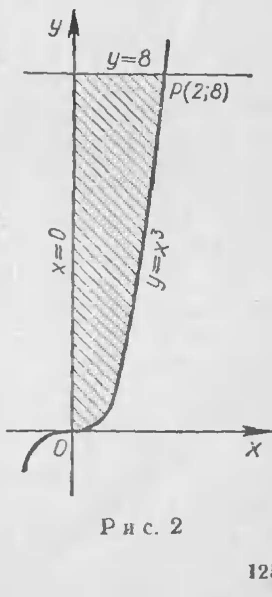


Рис. 2

Оценка «5» ставится, если работа выполнена полностью и в ней имеется не более одного недочета, например: если ученик при выполнении первого примера нашел, что $C = 1$, но не записал, что $F(x) = x^3 - x^2 + 1$, или при выполнении второго (третьего) примера при вычислении интеграла подставил не в том порядке пределы интегрирования, а аналогичное задание выполнил правильно. Недочетом является также небрежно выполненный рисунок (рисунок должен выполняться схематично, но аккуратно).

Оценка «4» может быть поставлена, если в работе при условии, что она выполнена полностью, допущено от двух до четырех недочетов или одна ошибка и один недочет. Например, в первом задании не найдено значение C или во втором неверно заменено значение $\cos\frac{\pi}{2}$ и $\cos 0$.

Оценку «4» можно поставить и в случае, когда первые два упражнения выполнены без недочетов, а в третьем за площадь искомой фигуры взята площадь криволинейной трапеции, ограниченная линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$. Однако учитель должен сообщить ученику, что это ошибка, и разъяснить, в чем она заключается. Иногда при выполнении работ ученик заштриховывал на чертеже фигуру, площадь которой нужно найти, правильно, а вычислял площадь не той фигуры. Здесь, чтобы решить вопрос, как классифицировать эту погрешность, — ошибкой или недочетом, — нужен повторный опрос учащегося. Он поможет учителю выяснить, случайной или нет была эта погрешность.

Оценка «3» может быть поставлена, если выполнены только два первых задания или одно третье или если имеется не более двух ошибок и одного недочета и т. д.

6. Об устном опросе

Некоторые суждения об организации опроса высказаны на страницах этого сборника в статье Е. Г. Глаголевой «Особенности преподавания алгебры и начал анализа в общеобразовательной школе» (с. 8).

Как известно, устный опрос, наряду с письменными работами, является основной формой проверки знаний и умений учащихся в средней школе.

Как показывает практика, около трети учебного времени уходит на опрос и контроль. Поэтому очень важно, чтобы оно затрачивалось с пользой для всех учащихся.

Умение интересно вести опрос дается далеко не каждому учителю. К сожалению, у многих учителей он носит только контролирующие функции. Вопросы, задаваемые учителем, требуют чаще всего пересказа («Скажи правило», «Сформулируй определение (или теорему)» и т. д.). Конечно, опрос необходим для проверки усвоения изученного, а также для оценки знаний учащихся. Однако только этим его функции не могут ограничиваться. Немалое значение имеет, например, устный опрос для выработки у учащихся правильной математической речи, умения слушать своего товарища и дополнять его ответ, а также навыков правильной записи математического текста при помощи символов и обозначений. Для старшеклассников, помимо всего прочего, устный опрос еще важен и потому, что многим из них понадобится умение правильно, последовательно, обоснованно и рационально излагать свои мысли на конкурсном экзамене в вузе или техникуме. Этому их должны научить в школе.

Правильно поставленный опрос является не только средством контроля, но и средством обучения. В ходе его происходит углубление и расширение знаний, практических умений, устанавливаются более глубокие связи с ранее изученным. Необходим обстоятельный устный опрос для подведения итогов по пройденной теме или важному ее большому разделу. В этом случае учитель имеет возможность при активном участии школьников обобщить изученный материал и сообщить некоторые дополнительные сведения. Например, в учебнике нет определения непрерывной функции. Однако учитель может подвести сильного ученика к этому определению и тот сформулирует его.

Обучающие функции опроса во многом зависят от умения учителя правильно ставить вопросы. Вопросы, предлагаемые ученикам, могут выявлять разные стороны знаний и проверять усвоение различного материала, но они всегда должны быть целенаправленными, логически обоснованными. Конечно, это не означает, что наряду с основными учитель не может задать дополнительные вопросы, помогающие лучше выяснить уровень знаний ученика.

Правильно поставленный опрос позволяет учителю выявить и устранить формализм в знаниях школьников. Очень часто учащиеся при ответе вроде бы произносят те, какие нужно, слова и термины. Но лишь дополнительные вопросы позволяют определить учителю глубину и правильность понимания отвечающим материала. Например, ученик утверждает, что он понимает термины «рациональное число» и «иррациональное число». На практике оказывается, что под иррациональным числом он понимает лишь числа вида $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{5}$ и т. д.

Нередки случаи, когда учащиеся путают понятия «степень» и «показатель степени». Они утверждают, что при умножении $a^m \cdot a^n$ «степени складываются» (и записывают: a^{m+n}).

Подобные неточности в знаниях учащегося возможно выяснить только при устном ответе.

О формализме в знаниях говорит и такой факт. Учащимся было предложено задание: «Вычислить $\int\limits_0^3 f(x)\,dx$, если функция задана графиком» (см. рис. 3).

Лишь немногие учащиеся поняли постановку задачи и решили ее рационально, не вычисляя интеграла, а найдя площади прямоугольника и трапеции (обе вычисляются устно).

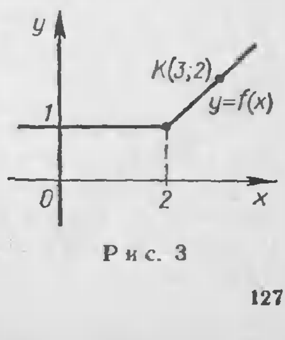


Рис. 3

В IX классе, как показывает опыт, многие учащиеся не могут найти предел функции $y = \sqrt{x}$ при $x \to 9$, хотя утверждают, что эта функция непрерывна в точке $x_0 = 9$.

Часто приходится наблюдать, как учитель при опросе ограничивается лишь воспроизведением (учеником) доказательства теоремы из учебника. При таком ответе учащийся буква в букву воспроизводит текст учебника и чертеж. Однако стоит только немного изменить обозначения или дать иной чертеж, как ученик не может повторить доказательства теоремы, которую он только что «доказал». Чтобы выяснить сознательность усвоения учащимся вопроса и избежать формализма в знаниях, полезно при опросе менять чертежи к теоремам, задавать вопросы на практическое применение теоремы (правила).

Например, при опросе доказательства теорем сложения полезно изменить чертеж, данный в учебнике, предложив случай, когда углы α и β тупые.

Полезно научить учащихся расчленять доказательство теоремы на отдельные этапы, уметь определять идею доказательства и, главное, научить применять доказанную теорему или выведенную формулу к решению хотя бы несложной задачи.

Учитель должен отчетливо представлять, что знание учеником формулировки соответствующего определения или теоремы необходимы, но это еще недостаточно для того, чтобы ученик имел ясные и конкретные представления об изучаемом. Совершенно очевидно, что, кроме формулировки определения, учащийся должен уметь приводить примеры объектов, ему удовлетворяющих, а также сходных, но не удовлетворяющих этому определению в силу той или иной причины (примеры собственные, а не из учебника).

При оценке устных ответов учитель прежде всего должен учитывать полноту изложения материала, прочность и осознанность усвоения, умение применять свои знания на практике. Результат оценки зависит также, как и при оценке письменной работы, от числа ошибок и недочетов, допущенных при устном ответе.

К ошибкам, например, относятся потеря и приобретение лишних корней при решении тригонометрических и логарифмических уравнений; незнание формул производных, определенных программой (см.: «МШ», 1978, № 4, с. 7, рубрика «Знать»).

К недочетам, например, относятся различного рода оговорки, нерациональный выбор решения, случайные погрешности при выполнении тождественных преобразований (см.: «МШ», 1978, № 4, с. 30).

Хотелось бы заметить, что оценка является очень сильным «оружием», и пользоваться им надо осторожно и с большим тактом. При выставлении той или иной отметки необходимо обосновать ее, дав анализ ответа учащегося. Иногда из педагогических соображений учитель за неудачный ответ может не выставлять ученику оценку, особенно в случаях, когда последний вызвался отвечать сам или когда сильный и добросовестный ученик по уважительной причине не подготовился к уроку.

Неправильно поступают учителя, если они за верный ответ на «несложный» вопрос или за верный ответ по домашнему заданию не ставят учащемуся оценку выше «4». В таких случаях для уточнения возможной оценки нужно задать еще один-два вопроса.

Однако любой правильный ответ должен оцениваться отметкой «5». И уж совсем недопустимо применение оценки в качестве орудия дисциплинарного взыскания, когда учитель выставляет оценку «2» в журнал учащемуся за плохое поведение на уроке или за то, что он «прослушал» объяснение учителя.

Думается, что учитель при выборе оценки за ответ ученика в первую очередь все-таки должен учитывать фактические знания учащегося и объем выполненной работы, а уж потом число ошибок и недочетов.

7. О зачетах

В общеобразовательных вечерних (сменных) школах работающей молодежи зачетная система является обязательной, на проведение зачетов и консультаций в этих типах школ выделяются специальные часы. В обычных общеобразовательных школах эта форма учета знаний учащихся не является обязательной. Однако многие учителя старших классов и в этих школах поняли преимущества такой формы и ввели в свою практику проведение зачетов. Все учителя, которые ведут тематический учет знаний учащихся, обычно проводят зачеты так же систематически, как контрольные работы. Зачеты проводятся, как правило, на уроке. Это обычный завершающий урок по теме. Иногда на зачет выделяется два урока. Форма их разная. Некоторые учителя проводят два зачета: на одном проверяют владение теорией, на другом — умение применять ее к решению задач. В большинстве случаев проводят один комбинированный зачет и также по-разному. У одних учителей это письменная работа по индивидуальным карточкам, у других — устно-письменная работа также с индивидуальными заданиями.

За определенное время (неделю, иногда больше) до зачета учитель указывает учащимся номера параграфов (и упражнений), которые нужно обязательно просмотреть (выполнить) в порядке подготовки к зачету. Некоторые учителя указывают задание после каждой письменной работы и ответов и заносят их в журнал учета (лицевые счета).

В порядке подготовки к зачету учащиеся получают консультации на дополнительных занятиях.

От сдачи зачета освобождаются только те ученики, которые при изучении данной темы безошибочно справились со всеми видами письменных работ и при ответах устно показали хорошее владение изученным материалом, им зачет выставляется автоматически.

В этих случаях учитель должен продумать, какую работу дать таким учащимся. Часто эти ученики получают более сложную задачу, и за ее решение им выставляется еще одна «5». Некоторые учителя предлагают разобрать необязательный теоретический материал учебника и выполнить соответствующие упражнения.

Для проведения зачета можно использовать материалы проверочных работ, помещенные в «Дидактических материалах по алгебре и началам анализа» для X класса или в «Книге для учителя».

Приведем пример зачетной работы по теме «Применение производной».

1) Напишите уравнение касательных к кривой $y = x^2 - 4$ в точках ее пересечения с осью абсцисс. 1) [$y = 4x - 8$;
2) $y = -4x - 8$.]

2) Определите промежутки монотонности функции $y = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x - 12$.

[$]-\infty; -2[$ и $]1; 8[$ — функция возрастает на каждом из этих промежутков; на $]-2; 1[$ — убывает.]

3) Сформулируйте достаточное условие максимума функции в точке x_0.

4) Сформулируйте правило нахождения наименьшего значения функции на отрезке.

Приведите примеры.

Некоторые учителя практикуют зачетные работы в виде домашних заданий. В этом случае работа дается в нескольких вариантах (с учетом ошибок и недочетов, допущенных учащимся при выполнении контрольной работы и устных ответов). Объем ее больше, чем обычное задание, и предлагается она на более длительный срок.

Такие работы полезны особенно в X классе. Они нужны и потому, что позволяют учителю научить учащихся правильному оформлению работы, в них проверяется, как правило, знание ряда вопросов. На проведение таких работ на уроке у учителя обычно нет времени, а в качестве домашней работы они вполне допустимы. Сильным учащимся включаются в такие работы задания из конкурсных экзаменов.

А. А. Пинский,
С. Т. Тхамафокова

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ВЗАИМОСВЯЗИ КУРСА «АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА» С КУРСОМ ФИЗИКИ IX—X КЛАССОВ

Одним из условий повышения эффективности учебного процесса и совершенствования качества знаний учащихся является установление и реализация межпредметных связей в процессе преподавания учебных предметов, в частности математики и физики.

Система взаимосвязей школьных курсов математики и физики, естественно, имеет несколько односторонний характер: сравнительно легко выяснить, что́ физике необходимо из математики, но довольно трудно установить, что́ физика дает математике. Причина заключается в разной природе физики и математики как наук и их роли как учебных предметов в системе межпредметных связей. Физике абсолютно необходим математический аппарат как язык, без которого невозможно описание физических явлений, и как орудие, как один из методов физического исследования (наряду с экспериментом). Математике же как науке о «чистых формах» в принципе безразличен конкретный естественнонаучный материал, к обработке которого могут быть приложены те или иные формулы и теоремы математики.

Однако такое положение математической науки вовсе не означает индеферентности математики как учебного предмета к системе межпредметных связей.

В общеобразовательной школе изучение математики, естественнонаучных и технических дисциплин происходит параллельно, и часто, помимо нашей воли и желания, не только математика используется в физике и в определенной мере даже определяет ход физического образования, но и физика использует математический аппарат, оказывает обратное воздействие на математику. Необходимо это взаимодействие сделать правилом, используя его сознательно и целенаправленно.

Прежде всего при обучении физике происходит закрепление математических знаний. Так, в IX классе производная используется при рассмотрении некоторых вопросов электродинамики. Но особенно широко математика используется в курсе физики X класса. Это выражается в систематическом применении производной при изучении колебаний, использовании и закреплении свойств тригонометрических и показательной функций, использовании интегрирования при решении ряда задач (радиоактивный распад, поглощение излучений и т. п.). Это не простое применение математики, а развитие и конкретизация ее идей и методов на широком естественнонаучном материале. Кроме того, при изучении физики происходит формирование и развитие ряда математических умений как в технике вычислений (логарифмическая линейка, таблицы, номограммы), так и в области графических и аналитических умений.

С другой стороны, изучение физики нередко ставит определенные задачи перед математикой в сфере формирования ряда физических понятий: скорость, сила, работа, мощность и т. п., которые являются исходными для формирования таких общих математических понятий, как «вектор», «производная», «интеграл» и др. В связи с этим при изучении математики и физики в IX—X классах особенно ценным является использование учащимися элементов математического анализа при изучении физики. Новое содержание физико-математического образования, внедренное в настоящее время в средней общеобразовательной школе, позволяет существенно расширить и углубить межпредметные связи математики и физики с целью усиления эффективности методики преподавания, повышения качества знаний учащихся, а также привития интереса учащимся к физико-математическим дисциплинам. Рассмотрим конкретно, как реализовать на практике межпредметные связи алгебры и начал анализа и физики в IX—X классах.

При анализе содержания программ указанных учебных предметов взят учебный план (см. табл. 1), принятый для средней общеобразовательной школы.

Таблица 1

Предмет	Всего часов по классам		Количество часов в неделю			
			IX класс		X класс	
	IX	X	I полугодие	II полугодие	I полугодие	II полугодие
Алгебра и начала анализа	105	88	3	3	3	2
Физика	140	158	4	4	5	4

Проведенный нами анализ программ позволил представить в виде схемы (см. табл. 2) взаимосвязь курсов алгебры с началами анализа и физики IX—X классов по действующим программам в соответствии с существующим учебным планом.

Таблица 2

Класс	Возможности использования математики на уроках физики	Тематический план по физике	№ недель	Тематический план по математике	Возможности использования физики на уроках математики
1	2	3	4	5	6
		Молекулярная физика			
IX	Действия над действительными *числами. Вычисления значений* функции по заданной формуле и при помощи таблиц. Стандартный вид числа	1. Основы *молекулярно-кинетической* теории (18 ч)	1	Действительные *числа. Числовые* функции (12 ч)	Понятие о величине и измерении. *Массы молекул и атомов.* Определение расстояний до небесных тел на основе измерения параллаксов. Число Авогадро. Ошибки при измерении, точность. Правила вычисления погрешности при решении задач и выполнении лабораторных работ. Графики тепловых процессов и деформации, как иллюстрации функциональных зависимостей
			2		
			3		
			4		
			5	Предел и непрерывность (22 ч)	Графики тепловых процессов
	Графики функции. Аналитическое задание функций. Приращение функции. Стандартный вид числа	2. Тепловые явления. Первый закон термодинамики (12 ч)	6		
			7		
			8		
		3. Свойства паров, жидкостей и твердых тел (17 ч)	9		
			10		

Таблица 2 (продолжение)

1	2	3	4	5	6
			11		
			12		
	Приращение функции. Функциональные зависимости. Стандартный вид числа. Задание функций аналитическими формулами и графиками. Исследование функций	**Электродинамика** 1. Электрическое поле (20 ч)	13	Производная и ее применения (32 ч)	Определение мгновенных значений скорости, ускорения и мощности. Связь между напряженностью и разностью потенциалов, выражение коэффициента поверхностного натяжения через поверхностную энергию. Физические задачи на нахождение экстремума функции. Понятие о величине и измерении (электроемкость, напряженность и др.)
			14		
			15		
	Производная (для анализа характеристик кулоновского поля — напряженности и потенциала, для определения электроемкости)		16		
			17		
	Сложение и разложение ректоров для описания электрического поля	2. Постоянный электрический ток (32 ч)	18		
			19		
			20		
			21		
			22		
			23		Угловые измерения. Правила вычисления погрешностей при решении задач и выполнении лабораторных работ
			24	Тригонометрические функции, их графики и про-	
			25		

Таблица 2 (продолжение)

1	2	3	4	5	6
	Векторы и действия над ними. Производная (для записи закона индукции Фарадея и формулы ЭДС самоиндукции)	3. Магнитное поле тока (12 ч)	26	изводные (30 ч)	
			27		
		4. Электромагнитная индукция (11 ч)	28		
			29		
			30		
	Приближенное равенство $\sin\alpha = \alpha$ (при малых значениях α) при решении задач		31		
		Физический практикум (16 ч)	32		
			33	Решение задач и повторение (9 ч)	
			34		
		Экскурсия (2 ч)	35		
X	Тождественные преобразования тригонометрических выражений, а также решение тригонометрических уравнений и неравенств. Графики функций синуса и косинуса, производные тригонометрических функций. Уравнения гармонических колебаний $y = A\cos(\omega x + \varphi)$	Колебания и волны	1	Тригонометрические функции, их графики и производные (продолжение) (22 ч)	Уравнение движения математического маятника. Гармонические колебания; свободные гармонические колебания: смещение, амплитуда, фаза, частота и период свободных колебаний. Сложение колебаний. Период свободных электромагнитных колебаний
		1. Механические колебания (10 ч)	2		
		2. Электромагнитные колебания	3		

Таблица 2 (продолжение)

1	2	3	4	5	6
	и дифференциальное уравнение $y'' = -\omega^2 y$. Тригонометрические функции числового аргумента и их производные	Переменный ток (16 ч)	4		
			5		
			6		
		3. Производство, передача и использование электрической энергии (6 ч)	7		
		4. Механические волны. Звук (8 ч)	8		
	Тригонометрические функции. Приращение функции. Тождественные преобразования тригонометрических выражений, решение тригонометрических уравнений и неравенств. Стандартный вид числа	5. Электромагнитные волны (15 ч)	9	Первообразная и интеграл (10 ч)	Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Работа переменной силы. Работа при изотермическом расширении газа. Энергия заряженного конденсатора и магнитного поля соленоида. Нахождение координаты по заданной скорости и скорости по заданному ускорению
			10		
			11		
		Оптика 1. Геометрическая оптика (17 ч)	12	Показательная, логарифмическая и степенная функции (20 ч)	Закон радиоактивного распада, период полураспада
			13		
			14		

Таблица 2 (продолжение)

1	2	3	4	5	6
		2. Световые волны (11 ч)	15		
			16		
			17		
		3. Элементы теории относительности (5 ч)	18		
		4. Излучение и спектры (7 ч)	19	Системы уравнений (14 ч)	Разветвленные цепи электрического тока. Кристаллические структуры
			20		
	Знания о показательной функции, дифференциальных уравнениях при изучении закона радиоактивного распада и периода полураспада (дифференциальное уравнение показательного роста $y' = -Cy$)	**Квантовая физика** 1. Световые кванты. Действие света	21		
			22		
			23		
		2. Физика атома (3 ч)	24		
		3. Атомное ядро (9 ч)	25		

Таблица 2 (окончание)

1	2	3	4	5	6
		4. Ядерная энергия, ее получение и использование (5 ч)	26	Решение задач и повторение (22 ч)	Решение задач с физическим содержанием
			27		
		5. Элементарные частицы (3 ч)	28		
		Обобщающие лекции (4 ч)	29		
		Физический практикум (10 ч)	30		
			31		
		Экскурсии (2 ч)	32		
		Повторение (15 ч)	33		
			34		
			35		

Г. Г. Левитас

УЧЕБНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА

Как известно, в условиях всеобуча традиционные методы преподавания уже недостаточны: теперь необходимо опрашивать всех по каждому вопросу программы, объяснять так, чтобы понял каждый ученик, обеспечивать самостоятельную работу каждого ученика. К тому же в условиях всеобуча необходимо резко сокращать объем домашних заданий и соответственно повышать эффективность классных занятий — уроков. В этом учителю помогают специальные средства обучения (СО).

В настоящее время выпущены десятки СО по различным темам курса алгебры и начал анализа. Имея то или иное из них, учитель может применять его по-разному. Например, диафильмы можно использовать и для объяснения, и для опроса, и для закрепления. Мы здесь, однако, опишем наиболее предпочтительные формы и границы применения отдельных видов СО на отдельных этапах урока.

1. Важным (обычно начальным) этапом каждого урока является контроль усвоения предыдущего материала, часто сочетаемый с контролем подготовленности класса к восприятию нового материала. Многие учителя используют здесь так называемый уплотненный опрос с помощью кодоскопа, а также специально разработанных диафильмов, диапозитивов и т. п. материалов. Для стопроцентного охвата учащихся при опросе, т. е. для проверки знаний у всех, можно использовать контролирующие устройства. В настоящее время выпускаются и продаются через учколлекторы автоматизированные контролирующие классы АМК-1, УГП и др. Можно изготовить в школьных мастерских и более простое устройство — «Круг-сигнал», описанное в журнале «Математика в школе», 1977, № 1 (обложка).

Более распространенное средство всеобщего опроса — математический диктант: учитель читает вопрос, каждый ученик дает краткий письменный ответ, далее второй вопрос и т. д. Обычно в диктанте бывает от 5 до 10 вопросов, и после него можно оценить работу каждого ученика, затратив на это несколько минут.

Заполненные учащимися контрольные листы проверяются либо самими учащимися (учитель сообщает правильные ответы), либо после урока учителем. Каждый из этих способов проверки по-своему важен. Для их сочетания можно воспользоваться копировальной бумагой. Ученик записывает ответы под копирку на двух листах одновременно (очень удобны для этого блокноты). Один лист сразу же сдается учителю для последующей оценки, а по второму листу ученик проверяет и исправляет по горячим следам результаты своей работы.

Весьма целесообразно использовать для математического диктанта магнитофонную запись: во-первых, можно проводить диктант в два варианта, двумя голосами (мужским и женским), а во-вторых, учитель освобождается для контроля за работой класса. Если для оценки готовности класса к восприятию нового материала особенно важен, скажем, второй вопрос, то учитель успевает просмотреть ответы на него у всех учеников класса до окончания диктанта и узнает, кто не готов к уроку.

Математические диктанты, если они проводятся регулярно, дисциплинируют учеников и обеспечивают систематический оперативный контроль за их работой.

Обязательная краткость ответов на вопросы диктанта не должна приводить к поверхностным вопросам. В диктанты можно включать не только вопросы типа «сосчитай в уме» или «напиши формулу», но и гораздо более глубокие задания: указать, использовалась ли такая-то теорема при решении такой-то задачи, определить, можно ли изменить порядок введения таких-то теорем, привести контрпример к такому-то положению и т. д.

2. Во время объяснения нового материала очень важно обеспечить высокий интерес учащихся. Для этой цели можно использовать кинофильмы, диафильмы, диапозитивы, таблицы, приборы. С их помощью достигается необходимое разнообразие в методах изложения нового материала. Но есть и другие побудительные причины для использования СО во время объяснения. Излагая материал, учитель обычно пользуется доской для создания так называемого зрительного ряда (надписи, рисунки, чертежи). Если зрительный ряд таков, что необходимо создавать его на глазах учащихся, постепенно усложняя и дополняя все новыми элементами, то доска (или кодоскоп) — лучшее средство для его создания. Но бывает, что учителю нужны готовые чертежи и надписи. И тогда более удобно воспользоваться специальными СО (диафильмы и пр.).

Демонстрация кинофильма проходит, как правило, при внешней пассивности зрителей (учителя и учеников). Поэтому кинофильм желательно использовать для первоначальной ориентировки в новом материале.

Демонстрация диафильма и диапозитивов может сочетаться с активной работой учеников. Такую работу можно организовать, проводя по каждому кадру диафильма и по каждому диапозитиву настоящее исследование. Учитель не просто демонстрирует кадр, а задает к нему вопросы и требует хотя бы краткой фиксации ответа каждым учеником. Еще более активной может быть работа с таблицей. Настенные таблицы — это источник информации, которым учащиеся должны научиться пользоваться. Обучение пользованию таблицами — важная часть обучения самостоятельному приобретению знаний, пользованию справочной литературой.

3. Самостоятельная работа (закрепление) обеспечивается применением раздаточных материалов. Лишь часть ее (воспроизводящее закрепление) может проходить одинаково для всего класса. Другая, не менее важная часть (творческое закрепление) должна протекать по вариантам различной трудности: задача, являющаяся творческой для одного ученика, для другого — легкое упражнение.

В настоящее время этот этап работы обеспечивается с помощью так называемых «Дидактических материалов».

Существенно, что, как правило, вместить все описанные виды работ в рамки одного 45-минутного урока невозможно. Полноценное планирование должно отводить на каждый вопрос как минимум 2 часа, хотя бы для этого и пришлось укрупнять порции материала, проходимого за один раз. Мы с удовлетворением отмечаем, что последние рекомендации по планированию («МШ», 1978, № 4) отводят на одну порцию обычно более одного урока. Двух- или трехурочное преподавание уже можно построить как полноценный учебный цикл, обеспечивающий полное усвоение материала. Время внутри цикла можно распределить, например, так:

1-й урок: а) контроль усвоения предыдущего материала, контроль готовности к изложению нового; б) изложение нового; в) первоначальное (воспроизводящее) закрепление, подготавливающее учеников к самостоятельной работе. 2-й урок: г) проверка усвоения знаний, преподанных на первом уроке; контроль готовности к самостоятельной работе; д) самостоятельная работа (творческое закрепление).

Как показывают многочисленные эксперименты, такое построение учебного цикла способствует успешному усвоению материала, особенно при условии применения необходимых учебных средств. Краткая библиография по этому вопросу дана в журнале «Математика в школе» (1977, № 4).

Для преподавания алгебры и начал анализа в IX—X классах нашей промышленностью выпускаются специальные средства обучения: кинофильмы, диафильмы, диапозитивы, транспаранты для кодоскопа (кодопозитивы), а также дидактические материалы. Среди этих СО есть такие, которые создавались в прежние годы, но могут быть хотя бы частично использованы теперь. Все пригодные СО включены в специальный список, многократно издававшийся. К сожалению, настенные таблицы, издававшиеся ранее, устарели. Вместо них можно использовать эскизы таблиц для X класса, опубликованные в журнале «Математика в школе» (1976, № 6), а также эскизы таблиц для IX класса, в составлении которых приняли участие Б. Е. Вейц и К. С. Муравин. Нужно сказать, что при подготовке этой статьи несколько таблиц было разработано вновь, а часть отредактирована заново, так что, во всяком случае, никакой ответственности за имеющиеся в данных эскизах недостатки мои соавторы не несут. Трехзначные таблицы логарифмов и тригонометрических функций разработаны при участии М. Б. Воловича.

Ниже приводятся рекомендации по использованию средств обучения.

Разумеется, в преподавании используются не только средства обучения промышленного производства, но и самодельные.

Каждое средство обучения имеет свои дидактические функции, свои возможности в деле организации учебного процесса, свои педагогические и технические границы использования. Оптимальным вариантом является комплексное, но разумное применение всех видов учебного оборудования. Этот вопрос приобретает особенно важное значение в условиях всеобуча. Нужно добиваться, чтобы преподавание было эффективным, каждый урок и каждый элемент урока — обучающими. Если слова учителя подкрепляются хорошо продуманным зрительным рядом, если на помощь ему приходят разнообразные средства обучения, то урок становится живее, интереснее, эффективнее, учение — более радостным и плодотворным для каждого школьника.

В качестве примера организации обучения с помощью учебных средств рассмотрим тему «Первообразная» (пункт 56 учебника «Алгебра и начала анализа 10»), рассчитанную на 2 часа (МШ, 1978, № 4, с. 39). Для преподавания здесь можно использовать:

1. Учебник (с. 75—77 и 100).
2. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 10 класса. М., «Просвещение», 1976 (с. 25—27 и 98—100).
3. Диафильм «Интеграл» (кн. 3—6, рис. 19—22).
4. Таблицы «Формулы дифференцирования» (ч. 1 и 2, рис. 9 и 23).

Первый урок начинаем математическим диктантом, чтобы проверить, все ли ученики готовы к восприятию нового — все ли они умеют дифференцировать и понимают физический смысл производной. Вот примерный текст такого диктанта:

1. Найдите производную функции $y = 8$.
2. Найдите производную функции $y = 7$.
3. Найдите производную функции $y = 3x^2 + 5x + 7$.
4. Найдите производную функции $y = 3x^2 + 5x + 12$.
5. Найдите производную функции $y = 3 \sin^2 x$.
6. Уравнение пути движущейся точки $s = 8x^3$. Найдите уравнение скорости ее движения.
7. Найдите уравнение ускорения движения той же точки.

Этот диктант следует проверить сразу, чтобы уже перед объяснением видеть, на каком уровне подготовленности находится класс. Если диктант проводится с помощью магнитофона, то учитель может обойти класс и хотя бы бегло ознакомиться с его результатами в процессе самого диктанта. Но и в этих условиях желательно провести анализ ответов сразу же по окончании диктанта. (Можно, например, чтобы ученики записывали ответы на двух листах, под копирку: один лист сдается учителю для оценки, а затем по второму листу ученик проверяет и анализирует свои ответы.) Анализ проходит особенно успешно, если воспользоваться какими-либо средствами обратной связи — контролирующими устройствами (АМК-1, УГК, «Круг-сигнал» и т. п.).

При анализе диктанта нужно подчеркнуть, что разные функции могут иметь одну и ту же производную (вопросы 1—2 и 3—4).

После анализа диктанта переходим к объяснению нового материала. Начав с краткого введения о необходимости решать задачу, обратную дифференцированию, можно показать таблицу (рис. 9 и 23) и научить школьников использовать их для решения этой задачи — для нахождения функции по ее производной. Здесь же важно подчеркнуть, опираясь на примеры из диктанта, что задача эта решается неоднозначно. Например, если производная $f'(x)$ равна нулю, то искомой функцией может быть и $f(x) = 7$, и $f(x) = 8$, и вообще любая $f(x) = C$, где $C \in R$.

Далее можно по учебнику ознакомить учащихся с определением первообразной и разобрать (лучше письменно!) примеры 1 и 2 со с. 76 учебника.

После этого рассматриваются кадры диафильма. В кадре 3 учитель обращает внимание на ударение в слове «первообразная» (можно привести аналогичные слова «безобразная» и «разнообразная»). В кадре 4 рассмотрен пример к определению первообразной. Желательно при его рассмотрении повторить определение в общем виде. Материал кадра дает для этого хорошую опору. Поэтому если сильный ученик напомнит классу это определение во время демонстрации кадра, то после этого кадр поможет воспроизвести определение и более слабым ученикам.

В кадрах 5 и 6 даны вопросы. Очень полезно требовать от учеников краткой записи ответов. В этом случае ученики не отвлекаются, более того, они тренируются в применении определения первообразной. Например, по кадру 5 ответы можно оформить так:

1) $f(x) = 4x^3$, $F(x) = x^4 + 3$;
2) $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x$;
3) $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$;
4) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \operatorname{tg} x$;
5) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\operatorname{ctg} x$.

Можно поступить и иначе: разобрать первый пример устно, а четыре остальные потребовать записать по вариантам.

По кадру 6 можно потребовать только доказательства, что данные в нем функции связаны соотношением $F'(x) = f(x)$. При этом можно показать общую схему доказательства:

1) $(\sin x + c)' = \cos x$; 2) $(-\cos x + c)' = \sin x$;

3) $\left(\frac{x^2}{2}+c\right)'=x$; 4) $(2\sqrt{x}+c)'=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Опять-таки желательно показ осуществить на одном примере, а остальные три потребовать решить по вариантам.

По окончании работы над кадрами следует считать объяснение завершенным и перейти к первоначальному закреплению материала. Для этого удобно воспользоваться упражнениями № 392—396. Однако эти задачи не заставляют каждого ученика пользоваться текстом определения. Для их письменного решения даже необязательно повторять сам термин «первообразная». Ликвидировать этот пробел помогают задания с пропусками, которые особенно полезно предъявить классу в виде печатных раздаточных материалов (тетради с печатной основой и т. п.), но можно подать и фронтально: кодоскопом или мелом на доске или даже на слух. Можно также воспользоваться диапроектором «Свет» (см. статью Т. Л. Сытиной в журнале «Математика в школе», 1975, № 4). Выполняя эти задания, ученики лишь выписывают пропущенные слова. Приведу пример таких заданий, разработанных Нгуен Ван Тыонгом (СРВ):

1. Заполните пропуски в определении первообразной: функция F называется ____ на заданном ____ для функции f, если для всех ____ из этого промежутка ____ = ____.

2. Докажите, что x^2 есть первообразная для $2x$ на $]-\infty;+\infty[$.

Доказательство. (____)' = ____ для всех $x \in$ ____.

3. Докажите, что функция $H(t)$ есть первообразная для функции $h(t)$ на указанном промежутке, если

а) $H(t)=2-3t+\frac{t^5}{5}$, $h(t)=t^4-3$, $t\in]-\infty;+\infty[$.

Решение. По определению, функция ____ есть первообразная на данном промежутке для функции ____, если для ____ данного промежутка ____ = ____.

$H(t)=2-3t+\frac{t^5}{5}$ есть первообразная для $h(t)=t^4-3$ на промежутке $]-\infty;+\infty[$, так как $H'(t)=\left(2-3t+\frac{t^5}{5}\right)'=$ $=2'-(3t)'+$ ____ $=0-$ ____ $+$ ____ $=$ ____ для всех $t\in$ $\in$ ____;

б) $H(t)=\frac{3}{\sqrt[3]{t^2}}$; $h(t)=-\frac{2}{\sqrt[3]{t^5}}$, $t\in]0;+\infty[$.

Решение. $H(t)=\frac{3}{\sqrt[3]{t^2}}$ есть и ______ для $h(t)=$ ______ на промежутке ____, так как $H'(t)=\left(\frac{3}{\sqrt[3]{t^2}}\right)'=\left(\frac{3}{t^-}\right)'=(3t^-)'=$ $=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=$ ____ $=$ ____ для всех ____;

в) $H(t) = t - \operatorname{ctg} t$; $h(t) = 1 + \frac{1}{\sin^2 t}$; $t \in]0; \pi[$.

Решение. $h'(t) = (t - \operatorname{ctg} t)' =$ ____ — ____ = ____ для всех ____. Следовательно, $H(t)$ есть ____ для $h(t)$ на ____;

г) $H(t) = \sin^2 t$, $h(t) = \sin 2t$, $t \in]-\infty; +\infty[$.

Решение. $H'(t) = (\sin^2 t)' = 2 \sin t$____ = ____; следовательно, ____________________________.

4. $G(x)$ есть первообразная для $g(x)$ на R; найдите $g(x)$, если а) $G(x) = x^2 - 2x$; б) $G(x) = -5$; в) $G(x) = (x-1)^2$; г) $G = 89$.

Решение. Если $G(x)$ — первообразная для $g(x)$ на R, то для всех $x \in$ ____ выполняется равенство ____ = ____; следовательно, а) $g(x) = G'(x) = (x^2 - 2x)' =$ ____;

б) $g(x) = G'(x) =$ ________________________;

в) $g(x) =$ ____ = ________________________;

г) ____ = ____ = ________________________.

5. Найдите среди приведенных в предыдущем задании функций первообразные для функции а) $g(x) = 2x - 2$ на R; б) $g(x) = 0$ на R.

Ответ. а ____; б) ____.

6. Найдите четыре первообразных для функции $f(x) = 3$. Сделайте вывод.

Решение. $(3x)' =$ ____. Поэтому одна из первообразных $F(x) =$ ____. $(3x + 18) =$ ____. Поэтому еще одна первообразная $F(x) =$ ____. $(3x +$ ____$) =$ ____. Поэтому еще одна первообразная $F(x) =$ ____. $(3x -$ ____$) =$ ____. Поэтому еще одна первообразная $F(x) =$ ____.

Ответ. 1) ____; 2) ____; 3) ____; 4) ____.

Вывод. Любая функция вида $3x + C$, где C — действительное число, является ____ для функции ____ на ____.

7. Пользуясь таблицей с формулами дифференцирования, найдите по одной первообразной для каждой из следующих функций: а) $\frac{1}{\cos^2 x}$; б) $\sin x$; в) x; г) 1; д) $-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Решение. а) Первообразной для $\frac{1}{\cos^2 x}$ является функция ____(таблица 2, формула ____); б) ____ для является функция ____(таблица ____, формула ____); в) первообразной для ____ является ____ x (таблица ____, формула ____); г) ____ для ____ является____(____); д) ________________________.

Закончить первый урок можно предупреждением, что на втором уроке будет письменный опрос, в процессе которого каждый ученик напишет полное определение первообразной и выполнит задание, аналогичное упражнениям 395—396 учебника. Для подготовки к этому опросу следует изучить пункт 97 учебника и выполнить указанные упражнения.

Второй урок начинается с письменного опроса:

1) Написать определение первообразной.

2) Доказать, что функция $x^3 + 17x + 9$ является первообразной для функции $3x^2 + 17$.

3) Найти одну из первообразных функции косинус. Ответ обосновать.

Один из учеников готовит ответ у доски (остальные ученики не должны видеть его записей; этого можно добиться, если в классе распашная доска, или с помощью кодоскопа, или имея вторую доску на задней стене класса или, наконец, попросив класс на время работы сесть спинами к доске). Здесь также удобно воспользоваться копиркой, чтобы по второму экземпляру сверить работы с записями на доске.

Наконец, переходим к заключительной части занятия — самостоятельной работе по вариантам (Дидактические материалы, с. 25—27, С—17). Учащиеся, быстро справившиеся с заданием, получают дополнительное задание (Дидактические материалы, с. 98—100, ДС-17 или учебник для X кл., с. 100, № 472—477).

А. Н. Земляков

НАГЛЯДНОСТЬ ПРИ ВВЕДЕНИИ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Изучение основных понятий математического анализа — таких, как «непрерывность», «монотонность», «производная» и т. д.,— проходит успешнее, если на этапе ознакомления с понятиями делается перенос внимания учащихся с формального, логически строгого и точного определения данного понятия на наглядные, интуитивные представления об этом понятии. Такой испытанный наглядный образ, как график функции, следует использовать не только в целях закрепления знаний о тех или иных понятиях и методах, но и в пропедевтических целях. Здесь следует добиваться того, чтобы упоминание о данном понятии ассоциировалось в первую очередь с соответствующим наглядно-графическим образом. Такой уровень усвоения, когда учащиеся могут проиллюстрировать утверждения на графиках, вполне доступен большинству учащихся. Переход от наглядно-интуитивного представления к формальному определению — это второй этап в формировании устойчивого представления о том или ином понятии. Поскольку это представление при таком подходе будет базироваться на наглядном образе, учащиеся должны более осознанно, уверенно и с меньшим количеством ошибок усматривать различные свойства исследуемых функций, применять изученные понятия к решению задач. Таковы вкратце общие методические предпосылки использования наглядности в изучении начал анализа.

Затруднения, возникающие при реализации описанного подхода к формированию представлений учащихся в настоящее время вытекают из отсутствия в школьном преподавании какой-либо традиции, основанной на опыте использования наглядно-графических образов в пропедевтических целях. Ниже приводится некоторая система упражнений наглядного характера, распространение которой в средней школе должно, по нашему мнению, способствовать образованию соответствующей методической традиции. Предлагаемый подход опирается на опыт изучения начал анализа в физико-математической школе-интернате при МГУ; эти упражнения были успешно опробованы в 1975—1978 гг. в IX—X классах экспериментальной средней школы № 82 АПН СССР поселка Черноголовка Московской области.

По каждой из выделенных ниже тем — непрерывность и пределы, монотонность и экстремумы, производная и касательная, первообразная и интеграл — мы предлагаем три типа упражнений:

1) используемые перед введением или одновременно с введением соответствующего понятия (эти упражнения отмечены значком «0»);

2) используемые для закрепления и для контроля усвоения;

3) более трудные задания для индивидуальной работы с хорошо успевающими учащимися и для факультативных занятий (такие упражнения отмечены звездочкой).

Два заключительных раздела статьи посвящены дополнительным вопросам — выпуклости и дифференциальным уравнениям. В последнем из них показывается на примере геометрической интерпретации дифференциальных уравнений, что наглядность является не только методическим и вспомогательным средством, но и важным компонентом теоретических исследований. Эти разделы можно использовать на факультативных занятиях.

Наконец, отметим, что в данном случае основным для нас является формирование устойчивых представлений о каждом из понятий, что несколько ограничивает как выбор, так и характер упражнений. Об использовании наглядно-графических образов при решении конкретных задач см., например, в статье В. Г. Болтянского «Как развивать «графическое мышление»» (МШ, 1978, № 2, с. 16—23).

1. Непрерывность и пределы функций

Подводя учащихся к этим двум понятиям, можно начать со следующих вопросов:

1^0. Чем отличаются графики функций (рис. 1, *а*), *б*))? Что можно сказать о поведении графика «б)» в точке $x = x_0$? Графиков «а)» и «в)» в точке $x = x_0$?

Опираясь на эти три графика, можно объяснить, что такое непрерывность, разрывность, предел функции в данной точке, для закрепления используя упражнения 2—3.

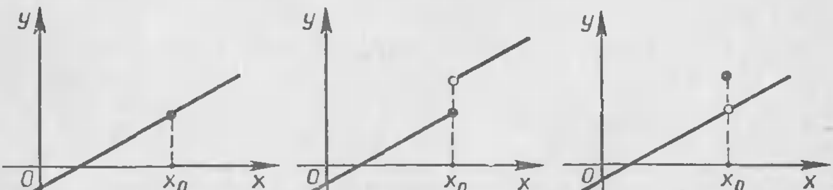


Рис. 1

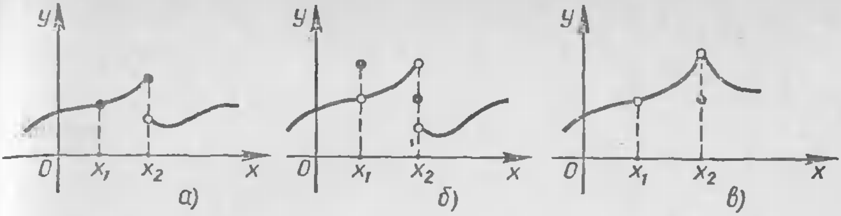


Рис. 2

2^0. В каких точках функции, графики которых изображены на рисунке 2, не имеют предела? Являются разрывными? (В точке x_1 на графике «в)» функция не определена; здесь уместно уточнить понятия предела и непрерывности: для существования предела в точке x_0 несущественно наличие значения $f(x_0)$; для непрерывности необходимо, чтобы это значение было определено.)

3^0. Нарисуйте графики функций, определенных всюду и разрывных: а) в точке $x = 0$; б) в точках $x = 1$ и $x = -1$; в) в каких-нибудь трех точках; г) в бесконечном множестве точек.

На этом этапе целесообразно уже переходить к конкретным примерам типа рекомендуемых в статье Е. Г. Глаголевой, Л. О. Денищевой и Б. В. Сорокина «Из опыта введения понятий непрерывности и предела функции» («МШ», 1978, № 4, с. 43—52). Задания, аналогичные упражнениям 2—3, можно использовать и при закреплении, и при контроле знаний как при устном опросе, так и в контрольных работах.

Приведем задание еще одного типа:

4. Дополните (если можно, несколькими способами) графики функций, изображенных на рисунке 3, до графиков всюду определенных и всюду непрерывных функций. Во всех ли случаях это возможно?

Теперь несколько более сложных задач:

5*. Придумайте функцию, определенную во всех точках $x \in]0; 1]$ и имеющую бесконечно много точек разрыва на этом промежутке. (Можно подсказать: разрывную во всех точках $x_n = 1/n$, $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$; возможный ответ дан на рис. 4.)

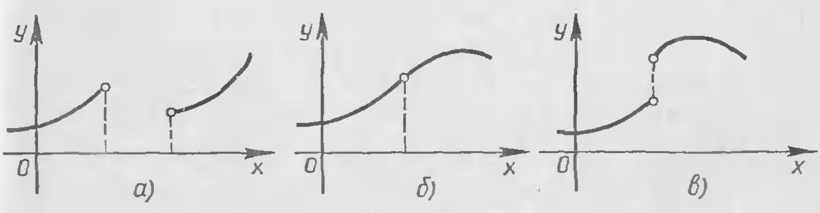


Рис. 3

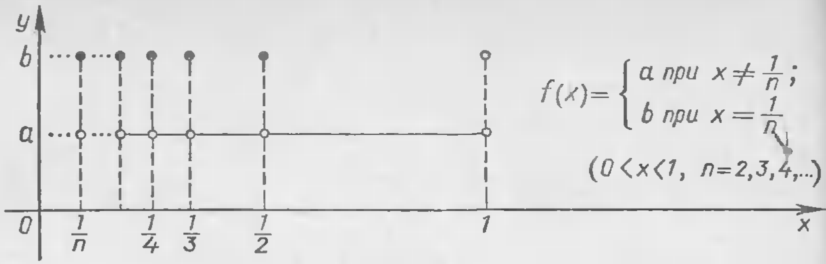


Рис. 4

Неожиданным для учащихся является следующее задание:

6*. Придумайте всюду определенную функцию, разрывную во всех точках.

Однако, зная такой пример (функцию Дирихле):

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 1, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

учащиеся легко справляются со следующей задачей:

7*. Придумайте всюду определенную функцию, разрывную во всех точках $x \neq 0$ и непрерывную в точке $x = 0$.

(Ответ. Например, $f(x) = x \cdot D(x)$.)

Не следует думать, что примеры функций из заданий 5—7 — это только, так сказать, математические забавы; существование таких примеров свидетельствует о некоторой ограниченности геометрического воображения и интуиции, заставляет быть более осторожными в обращении с различного рода понятиями. С другой стороны, подобные примеры функций расширяют кругозор, приучают к более живому, нестандартному мышлению. Ряд примеров, кажущихся на первый взгляд мало правдоподобными, мы приведем в дальнейшем.

2. Монотонность и точки экстремума

Общему понятию монотонности функции на данном множестве целесообразно предпослать наглядно более ясное понятие монотонности функции на промежутке: функция f возрастает (убывает) на промежутке $I \subset D(f)$, если при возрастании x на этом промежутке значения $f(x)$ увеличиваются (уменьшаются).

1°. Укажите промежутки возрастания и промежутки убывания для функций, графики которых изображены на рисунке 5. Дополнительные вопросы: а) Можно ли для графика б) утверждать, что функция возрастает на всем отрезке [0; b]? (Ответ. Нельзя.) б) В какой из промежутков монотонности можно включить точку $x = a$ для графика в)? (Ответ. И в левый, и в правый.)

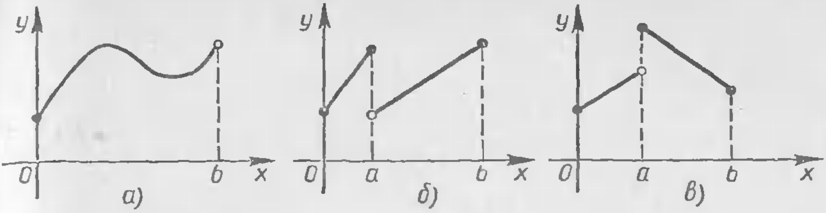


Рис. 5

2⁰. Нарисуйте график функции, которая: а) возрастала бы на всей числовой прямой; б) убывала бы на всей прямой. (Дополнительно можно потребовать, чтобы функция была всюду положительной.)

3. Нарисуйте график функции, которая: а) убывала бы на промежутках]—∞; 0] и [2; 5] и возрастала бы на промежутках [0; 2] и [5; ∞[; б) имела бы шесть чередующихся между собой промежутков возрастания и убывания; в) имела бы бесконечно много чередующихся между собой промежутков возрастания и убывания. (Дополнительно можно потребовать, чтобы функция была непрерывной или же, напротив, имела точки разрыва. В связи с этим упражнением можно рассмотреть функцию $f(x) = \{x\}$, которая возрастает на каждом полуинтервале вида $[n; n+1[$, где n — целое, и не является возрастающей ни на каком промежутке длины, большей 1.)

По существу, задача исследования функций, которой занимается дифференциальное исчисление, состоит в отыскании промежутков монотонности и точек экстремума для тех или иных функций. (Как видно из примеров упр. 1, при этом следует отыскивать также и точки разрыва функций.) Поэтому изучение понятия монотонности целесообразно сочетать с введением понятия экстремума — максимума или минимума.

4⁰. Укажите точки максимума и точки минимума для функций, графики которых изображены на рисунке 6.

К о м м е н т а р и й. Рассмотрение графика (рис. 6, *а*)) можно сопроводить словами: «до» точки x_1 (включительно!) функция убывает, «после» x_1 (включая точку x_1!) в некотором промежутке воз-

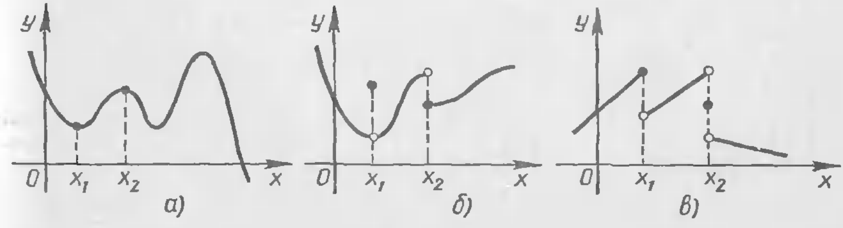


Рис. 6

растает, поэтому x_1 — точка минимума. Переходя к графику «б)», следует отметить, сколь существенно, что в случае «а)» точка x_1 входит в промежутки убывания слева от x_1 и возрастания справа от x_1! В случае «б)» точка x_1 уже будет точкой максимума. Заметим, что дело здесь даже не в разрывности функции в точке x_1, а в том, что сходство в определениях монотонности и экстремумов (в обоих случаях выписываются неравенства) только внешнее, кажущееся: верно, что если f убывает на промежутке $]a; x_1]$ и возрастает на $[x_1; b[$, то f имеет минимум в точке x_1, но обратное неверно и для непрерывных функций — см. ниже, упр. 7.

5. Нарисуйте график всюду определенной функции, которая: а) имела бы экстремумы в точках $x = -1$ и $x = 0$; б) имела бы экстремумы в точках $x = 1, 3, 5, 7$ и 9; в) имела бы бесконечно много точек экстремума. (Дополнительно можно потребовать, чтобы функция была всюду непрерывной или, напротив, чтобы она имела разрыв во всех точках экстремума. Здесь и далее экстремумы «строгие», в отличие от вводимых в новом пособии «нестрогих» экстремумов.)

6*. а) Нарисуйте график функции, определенной на интервале $]0; 1[$ и имеющей на этом интервале бесконечно много точек экстремума. б) То же самое задание, только требуется, чтобы функция была непрерывной во всех точках $x \in]0; 1[$. в) Наконец, нарисуйте график всюду определенной и всюду непрерывной функции, по-прежнему имеющей на интервале $]0; 1[$ бесконечно много точек экстремума.

Ответы. В задаче 6, *а*) годится график, изображенный на рисунке 4; еще один пример дан на рисунке 7, *а*). Его последовательные модификации, изображенные на рисунке 7, *б*) и *в*), служат иллюстрациями для задач 6, *б*) и 6, *в*). (На рис. 7, *б*) в точках $x = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ — максимум.) График на рисунке 7, *в*) подводит к решению следующей задачи:

7*. Придумайте непрерывную на всей числовой прямой функцию, имеющую минимум в точке $x = 0$ и не являющуюся возрастающей ни в каком промежутке вида $[0; a[$, где $a > 0$.

Соответствующий пример изображен на рисунке 8: график справа от точки $x = 0$ строится аналогично графику на рисунке 7, *в*), так что в любом промежутке вида $[0; a[$ будет содержаться

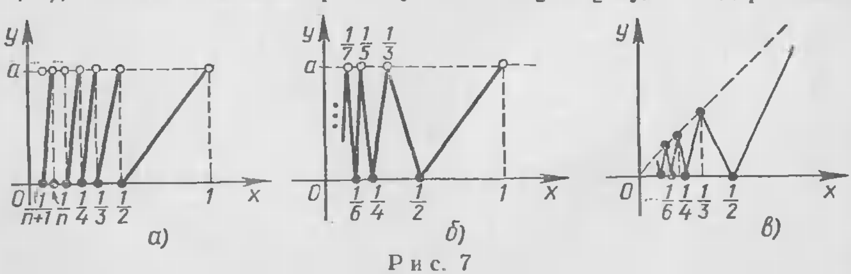


Рис. 7

бесконечно много промежутков как убывания, так и возрастания для этой функции.

Заметим, что функции, ведущие себя так «плохо», как в трех последних примерах (упр. 6, *б*), 6, *в*) и 7), можно задать и аналитически: нетрудно проверить, что нужными свойствами обладают соответственно функции:

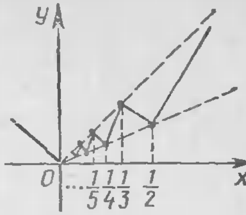


Рис. 8

$$y = \left|\sin\frac{1}{x}\right|, \ 0 < x < 1;$$

$$y = \begin{cases} \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x \leqslant 0; \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \left|x\sin\frac{1}{x}\right| + 0{,}5x \text{ при } x > 0, \\ -x \text{ при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

8*. а) Придумайте всюду определенную функцию, имеющую ровно две точки максимума и не имеющую больше никаких точек экстремума. б) То же самое задание, только требуется, чтобы функция была еще и всюду непрерывной.

Возможные ответы даны на рисунке 9, «*а*)» и «*б*)». Кажущийся поначалу парадоксальным пример «б)» возможен потому, что мы рассматриваем только «строгие» экстремумы, т. е. требуем в определении, например, точки максимума x_0 выполнения строго неравенства $f(x) < f(x_0)$ при $x \neq x_0$.

3. Производная и касательная

Для более детального изучения поведения функций наряду с понятиями возрастания и убывания функций вводится понятие скорости изменения функции, т. е. производной.

1°. По графикам функций «*а*)», «*б*)», «*в*)» на рисунке 10 укажите, на каких промежутках скорость изменения функции — в интуитивном понимании этих слов — положительна, отрицательна, равна нулю. Для графиков «*а*)» и «*б*)» укажите численное значение скорости изменения функции на разных промежутках.

Большинство учащихся догадается, каков правильный ответ в этом упражнении. После обсуждения задается вопрос: «Как оп-

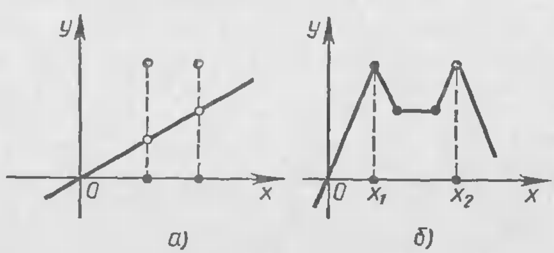


Рис. 9

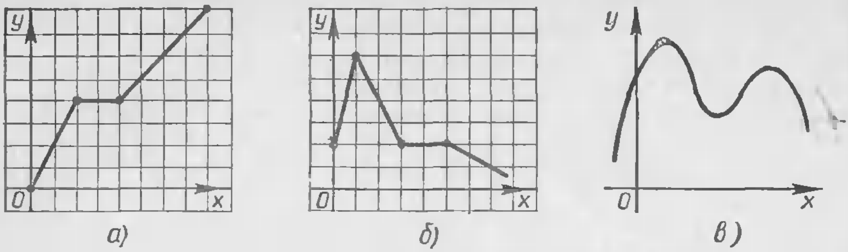


Рис. 10

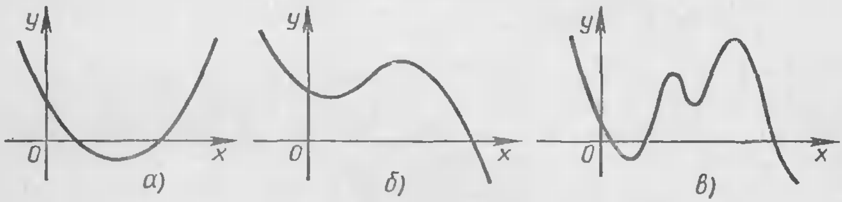


Рис. 11

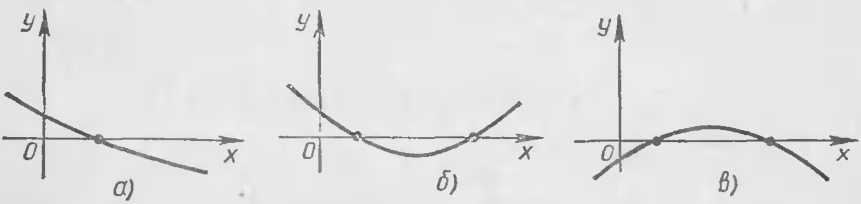


Рис. 12

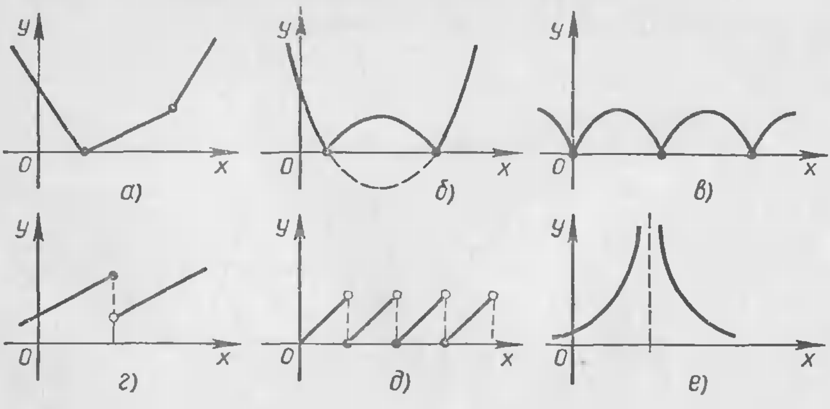


Рис. 13

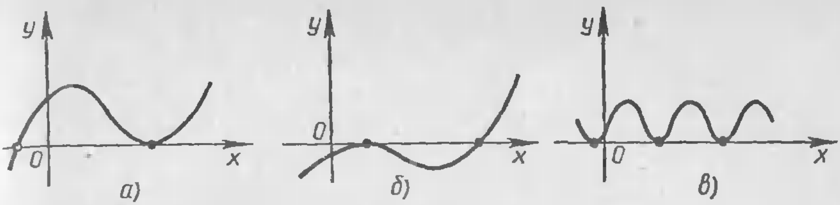


Рис. 14

ределить, что такое скорость изменения функции, если сама эта скорость меняется, как на рисунке 10, *в*)?» Тем самым учащиеся подводятся к точному определению производной — скорости изменения функции в данной точке. Дав определение, можно сразу показать, что оно приводит к уже угаданному ответу для функций с графиками «*а*)» и «*б*)», рисунок 10. Здесь же стоит обратить внимание на «неопределенность» производной в точках излома графиков, на ее скачкообразное изменение в этих точках. Прежде чем переходить к более сложным примерам вычисления производных, целесообразно предложить еще несколько наглядных упражнений.

2. Под графиками функций $y = f(x)$, изображенными на рисунке 11, нарисуйте примерный вид графиков производных $y = f'(x)$ этих функций, показывая соответствие между характерными точками обоих графиков.

3. Наоборот, по графикам производных $y = f'(x)$, изображенным на рисунке 12, восстановите примерный вид графиков $y = f(x)$: определите промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума.

После разбора упражнения 3 можно объяснить смысл дальнейших действий: отыскание промежутков монотонности дифференцируемой функции f и ее точек экстремума сводится к исследованию знака производной этой функции, т. е. к более простой задаче решения неравенств $f' > 0$ и $f' < 0$. Поэтому и нужно научиться вычислять производные различных функций.

При повторении этого материала на последующих уроках можно воспользоваться заданиями, аналогичными упражнению 2, но только на другом графическом материале.

4. Под графиками функций на рисунке 13 изобразите графики производных этих функций.

5. По графикам производных, изображенным на рисунке 14, восстановите примерный вид графиков самих функций.

Обсуждая упражнение 4, следует вспомнить про разрыв производной в точках излома и рассмотреть вопрос об отсутствии производной в точках разрыва самой функции. Анализируя графики функции и ее производной, можно подвести учащихся к наглядно-интуитивному пониманию теоремы Ферма: в точках экстремума производная либо равна 0, либо не существует. График на рисунке 13, *а*), а также и упражнение 5 говорят о несправедливости обрат-

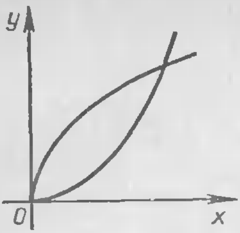


Рис. 15

ной теоремы: критические точки функции не обязаны являться точками экстремума.

6. На одном чертеже изобразите графики производных двух функций, заданных на рисунке 15 графиками. (Обе функции возрастают, и требуется сравнить скорости возрастания.)

Приведем две более сложные задачи на понятие производной:

7*. Придумайте всюду определенную функцию, имеющую производную только в одной точке (например, в точке $x = 0$).

Ответ. Например, $f(x) = x^2 \cdot D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле (см. п. 1, упр. 6); конечно, эта функция разрывна во всех точках, кроме $x = 0$*.

8*. Придумайте дифференцируемую на всей числовой прямой функцию, производная которой имела бы точку разрыва.

Такой пример можно придумать, модифицируя функцию из упражнения 6, *в*) пункта 2 («сглаживая углы» у графика 7, *в*)); проще всего задать такую функцию формулой:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Совершенно необходимым, на наш взгляд, является привлечение наглядно-геометрических представлений при изучении понятия касательной к графику. По-видимому, вполне приемлемой для средней школы является методика введения этого понятия, принятая в вузах, на которой мы кратко и остановимся.

Если скорость изменения функции f в данной точке x_0 равна $f'(x_0) = k$, то при x, близких к x_0, функция $f(x)$ должна изменяться примерно как линейная функция $y = kx + b$, такая, что $y_0 = kx_0 + b = f(x_0)$. Находя отсюда значение $b = f(x_0) - kx_0$, получаем уравнение той прямой, к которой близок график $y = f(x)$ при $x \approx x_0$:

$$y = kx + f(x_0) - kx_0 = f(x_0) + k(x - x_0) = \\ = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Эта прямая и называется касательной к графику $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$.

Касательная (M_0M) (рис. 16) может рассматриваться и как «предельное положение секущей» (M_0M_1), проходящей через точки

---

* Заметим, что существуют непрерывные всюду, но нигде не дифференцируемые функции — графики таких функций как бы имеют излом в каждой своей точке! Примеры подобных функций требуют довольно сложных конструкций, и мы их не приводим.

с абсциссами x_0 и x_1 при x_1, стремящемся к x_0. В самом деле, угловой коэффициент секущей равен

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

(рис. 16.) и стремится как раз к $f'(x_0)$ при $x_1 \to x_0$ (т. е. при $\Delta x \to 0$).

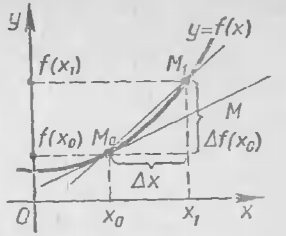


Рис. 16

Опираясь на указанный наглядно-геометрический смысл касательной, удобно трактовать приближенную формулу

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \text{ при } x \approx x_0$$

или

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x \text{ при } \Delta x \approx 0$$

графически: мы просто заменяем график $y = f(x)$ на касательную к нему в точке с абсциссой $x = x_0$ (рис. 17).

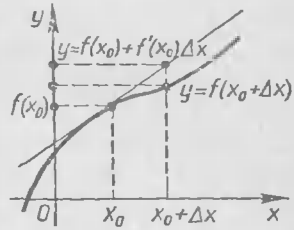


Рис. 17

9. Частными случаями указанных приближенных формул являются формулы:

а) $(x_0+\Delta x)^2 \approx x_0^2 + 2x_0\Delta x$;

б) $\sqrt{x_0+\Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \dfrac{\Delta x}{2\sqrt{x_0}}$;

в) $\dfrac{1}{x_0+\Delta x} \approx \dfrac{1}{x_0} - \dfrac{\Delta x}{x_0^2}$.

Проиллюстрируйте эти формулы с помощью графиков. Поясните на графиках, с недостатком или с избытком дают эти формулы приближенные значения функций в левых частях.

При изучении признаков монотонности и экстремумов дифференцируемых функций можно предложить учащимся целый ряд задач, сочетающих в себе идеи пунктов 2 и 3, например, такого характера.

10. Придумайте функцию f, заданную на интервале $]0; 2[$, такую, что $f' < 0$ на интервале $]0; 1[$, $f' > 0$ на интервале $]1; 2[$ и чтобы тем не менее точка $x = 1$ не была точкой минимума. (В а р и а н т ы. Чтобы $x = 1$ была точкой максимума; чтобы $x = 1$ не была точкой экстремума; примерами, конечно, служат функции, разрывные в точке $x = 1$.)

11. Придумайте дифференцируемую на всей числовой оси функцию, не имеющую точек экстремума, производная которой обращалась бы в ноль в бесконечном множестве точек. (Такой пример можно задать формулой $y = x + \sin x$ или же графически — ср. с упр. 5, рис. 14, *в*).)

12*. Придумайте функцию, возрастающую в точке x_0, но не возрастающую ни в каком интервале, содержащем x_0, причем непрерывную на всей числовой прямой. (Вариант: «дифференцируемую на всей числовой прямой», примеры аналогичны примерам из п. 2, упр. 7 и п. 3, упр. 8.)

4. Первообразная и интеграл

Введению понятия первообразной целесообразно предпослать упражнения типа упражнения 2 из пункта 3: под графиком функции нарисовать график ее производной.

1°. Зная график производной функции F, т. е. график $y = f(x) = F'(x)$ (рис. 18), нарисуйте примерный вид графика самой функции F. Однозначно ли восстанавливается график F? Как получаются один из другого графики с одной и той же производной?

Как правило, учащиеся справляются с этим заданием и вопросами, после чего уже легко воспринимают как определение, так и основное свойство первообразной.

2. Зная график функции f (рис. 19), укажите промежутки возрастания и убывания первообразной для этой функции.

3. Под графиком функции $f(x)$ (рис. 20) нарисуйте график первообразной для $f(x)$, проходящий через точку $(0; 0)$.

4. Нарисуйте график функции

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ -1 \text{ при } x < 0, \\ 0 \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

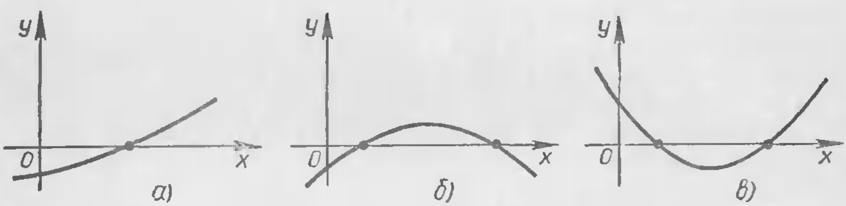


Рис. 18

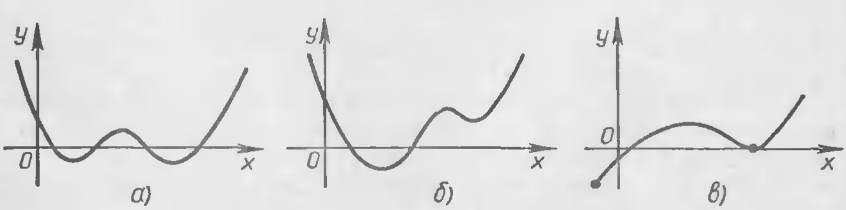
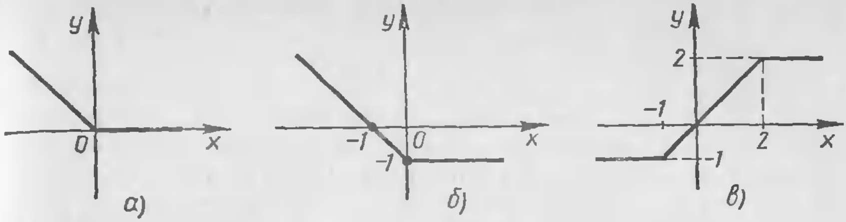


Рис. 19



Р и с. 20

Рассматривая первообразные для $\operatorname{sgn} x$ на промежутках $]-\infty; 0[$ и $]0; \infty[$ и их графики, покажите, что функция $\operatorname{sgn} x$ не имеет первообразной на всей числовой прямой.

5. Напишите формулы и нарисуйте графики всевозможных первообразных для функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$, рассматриваемые на всей области определения этой функции — на объединении промежутков $]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$. (Заметим, что на каждом из этих бесконечных интервалов можно брать свою постоянную, так что общий вид первообразных записывается так:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1 \text{ при } x > 0, \\ -\frac{1}{x} + C_2 \text{ при } x < 0.) \end{cases}$$

6. Нарисовав графики функций а) $f(x) = \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; в) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, покажите с их помощью, при каких a и b можно рассматривать интеграл

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

К о м м е н т а р и й. Нередко учащиеся без тени сомнения вычисляют:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2,$$

не смущаясь даже тем, что получается отрицательный интеграл от положительной функции. Упражнение 6 поможет разобраться с таким вопросом: для существования интеграла от функции f нужно, чтобы у f существовала первообразная на всем отрезке интегрирования, и уж, во всяком случае, необходимо, чтобы f была определена на этом отрезке!

7*. Придумайте разрывную функцию, имеющую первообразную на всей числовой прямой. (О т в е т. Например, функция из упр. 9, п. 3.)

5*. Выпуклость и вторая производная

Функции, графики которых изображены на рисунках 21, *а*) и *б*), обе возрастают, но по-разному: график «а)» выпуклый вниз, а график «б)» выпуклый вверх. Будучи наглядно ясным, понятие выпуклости графика (вверх или вниз) легко может быть формализовано. Рассматривая поведение касательных к графикам «а)» и «б)», мы видим, что в первом случае с возрастанием x угловой коэффициент касательной также возрастает, а во втором случае, напротив, уменьшается. Ограничиваясь рассмотрением только дифференцируемых функций, дадим такое определение: функция выпукла вниз (вверх) на интервале $]a; b[$, если ее производная — т. е. как раз угловой коэффициент касательной — является на этом интервале возрастающей (соответственно убывающей) функцией. Для графика на рисунке 21, *в*) направление выпуклости меняется в точке с абсциссой $x = x_0$, график как бы перегибается в этой точке — такие точки называются точками перегиба функций. Введенные понятия (выпуклости, точек перегиба) позволяют уточнить детали поведения функций, различить типы графиков, одинаковые с позиции рассмотрения только монотонности (или знака производной).

1. Нарисуйте график всюду определенной функции, выпуклой вверх и: а) возрастающей; б) убывающей на всей числовой прямой.

(Это упражнение показывает, что понятия монотонности и выпуклости для данной функции не связаны одно с другим: выпуклость функции связана с возрастанием или убыванием производной функции, но не самой функции. Дополнительно в упражнении 1 можно потребовать, чтобы функция была положительной на всей оси; можно также заменить в условии направление выпуклости.)

2. Для функций, графики которых изображены на рисунке 22, укажите промежутки выпуклости вверх и вниз, а также точки перегиба.

К о м м е н т а р и й. В связи с графиком «в)» упражнения 2 можно обсудить следующий вопрос: почему параболу (т. е. график квадратичной функции, например просто $y = x^2$) всегда рисуют выпуклостью в одну сторону, а не так, скажем, как на рисунке 22, *в*)? Объяснение, например, состоит в том, что производная квадратич-

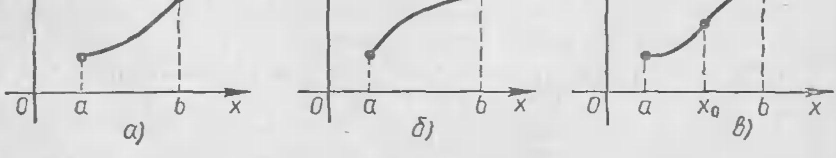


Рис. 21

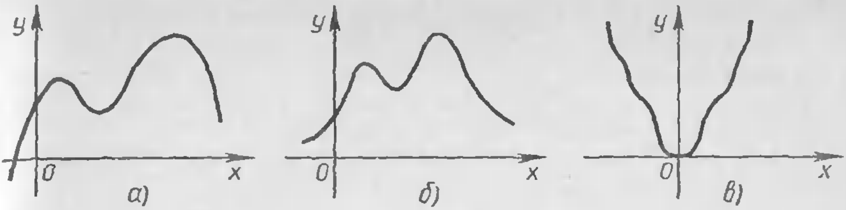


Рис. 22

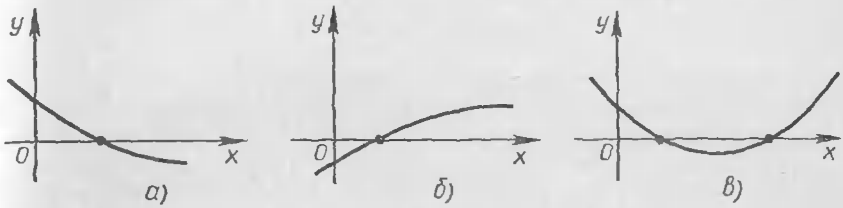


Рис. 23

ной функции — это линейная функция, а она либо возрастает, либо убывает на всей числовой оси.

3. Нарисуйте график (всюду дифференцируемой) функции, выпуклой вниз на промежутках $]-\infty; 1[$ и $]3; \infty[$ и выпуклой вверх на интервале $]1; 3[$. (Дополнительно можно потребовать, чтобы функция была всюду положительной или же всюду отрицательной.)

4. Нарисуйте несколько графиков функций, имеющих в *точности*: а) две, б) три заданных точки перегиба. (Можно на координатной плоскости задать соответствующие точки графиков, например в случае «а)» — точки (1; 2) и (3; 4) или (1; 2) и (3; 1).

5. Придумайте функцию, которая имела бы бесконечно много точек перегиба.

Понятно, что раз выпуклость функции f связана со свойствами монотонности ее производной f', то для отыскания промежутков выпуклости можно воспользоваться производной от производной, т. е. второй производной функции $f: f'' = (f')'$. Положительность f'' соответствует выпуклости f вниз, отрицательность — выпуклости f вверх.

6. Под графиками функций, изображенными на рисунке 22, нарисуйте (примерные) графики вторых производных этих функций. (Конечно, это упражнение можно варьировать на многих графиках,— например, взять графики на рис. 13.)

7. Нарисуйте график какой-нибудь функции f так, чтобы график $y = f''(x)$ выглядел так, как изображено на рисунке 23. (Это задание можно выполнить в два приема — сначала нарисовать график $y = f'(x)$, а лишь потом — график $y = f(x)$. Поскольку $f'(x)$ определяется только с точностью до постоянного слагаемого

C, сама функция $f(x)$ определяется с точностью до линейной функции $Cx + C_1$,— это также можно обсудить в связи с упр. 7.)

Дальнейшие задачи и вопросы, связанные с понятиями выпуклости и второй производной (в частности, вопрос об определении характера критической точки, в которой $f'(x_0) = 0$, с помощью знака второй производной $f''(x_0)$), можно найти в многочисленных учебниках математического анализа.

6*. Геометрический смысл дифференциальных уравнений

Уравнения, в которые входит только первая производная y' неизвестной функции $y = y(x)$, называются дифференциальными уравнениями первого порядка.

П р и м е р ы. 1) Если $f(x)$ — заданная функция, то решениями дифференциального уравнения $y' = f(x)$ являются первообразные для функции $f(x): y(x) = F(x) + C$, где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная, C — произвольная постоянная.

2) Дифференциальное уравнение показательного роста имеет вид $y' = ky$; его решения записываются в виде $y(x) = Ae^{kx}$, где A — произвольная постоянная.

В приложениях часто встречаются уравнения более общего вида $y' = f(y)$, где f — какая-то заданная функция (например, $y' = ky + b$, $y' = ky^2$ и т. п.). Мы покажем, как простые и геометрически наглядные соображения дают способ отыскания решений уравнений такого вида.

Начнем с геометрической интерпретации еще более общего дифференциального уравнения $y' = F(x; y)$, где $F(x; y)$ — какое-то заданное выражение от переменных x и y. Если функция $y(x)$ является решением этого уравнения на некотором интервале, то на этом интервале должно выполняться соотношение

$$y'(x) = F(x; y(x)).$$

Учитывая, что $y'(x)$ — это угловой коэффициент касательной к графику $y = y(x)$, мы видим, что в точке $(x; y)$ графика этот коэффициент должен равняться $F(x; y)$. Поскольку выражение $F(x; y)$ задано, мы можем с самого начала указать касательные к графикам решений в каждой точке координатной плоскости: касательной в точке $(x; y)$ будет прямая с угловым коэффициентом $k = F(x; y)$. Соответствие, при котором точке $(x; y)$ отвечает такая прямая, называется полем направлений дифференциального уравнения $y' = F(x; y)$. Так, на рисунке 24 изображены поля направлений для уравнений: а) $y' = x$; б) $y' = y$; в) $y' = y + 1$; конечно, касательные к графикам искомых функций — решений выписанных дифференциальных уравнений — нарисованы не во всех точках, а только в некоторых.

Построение поля направлений для любого дифференциального

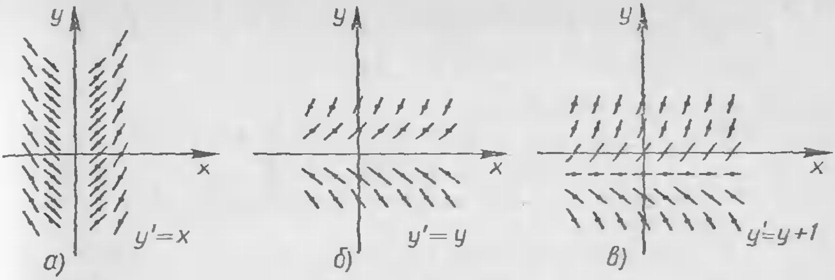


Рис. 24

уравнения вида $y' = f(x)$ облегчается тем, что угловой коэффициент касательных постоянен вдоль каждой вертикальной прямой $x = x_0$: он равен $k = f(x_0)$. Напомним, что решение таких уравнений сводится к интегрированию — отысканию первообразных для функций $f(x)$.

Для уравнений интересующего нас типа $y' = f(y)$ поля направлений, напротив, постоянны вдоль горизонтальных прямых $y = y_0$. Но если сделать симметрию относительно прямой $y = x$, то горизонтали и вертикали поменяются местами и поле направлений, постоянное вдоль горизонталей, перейдет в поле направлений, постоянное вдоль вертикалей. График решения $y = y(x)$ уравнения $y' = f(y)$ перейдет в график обратной функции $x = x(y)$ и будет касаться симметричного поля направлений (рис. 25). Это означает, что обратная функция $x(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению типа $x'(y) = g(y)$, решаемому интегрированием. Заметим, что если прямая ($y = kx + b$) имела угловой коэффициент k, то симметричная ей прямая (она будет графиком обратной функции $x = \frac{1}{k}y - \frac{b}{k}$) будет иметь угловой коэффициент $\frac{1}{k}$, поэтому в нашем случае симметричное поле направлений задается формулой $g(y) = \frac{1}{f(y)}$ и обратная функция $x = x(y)$ к искомой функции $y = y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x'(y) = \frac{1}{f(y)}$ и поэтому является первообразной для функции $\frac{1}{f(y)}$. (Мы игнорировали вопрос о существовании обратной функции, предполагая, что она существует на рассматриваемом интервале.)

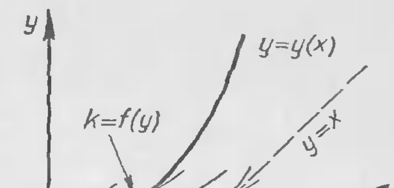


Рис. 25

Примеры. 1) Решение дифференциального уравнения $y' = y + 1$ приводится к отысканию первообразных $x(y)$ для функции $\frac{1}{y+1}$; при $y + 1 > 0$ это будут функции $x = \ln(y + 1) + C$. Выражая y через x, находим:
$\ln(y + 1) = x - C$, $y + 1 = e^{x-C}$, $y = -1 + e^{x-C} = -1 + Ae^{x}$, где $A = e^{-C}$ — постоянная. Если считать A любым числом, то нетрудно убедиться, что полученная формула дает все решения исходного уравнения.

2) Для дифференциального уравнения $y' = y^2$ находим:

$$x'(y) = \frac{1}{y^2}, \ x = -\frac{1}{y} + C, \ \frac{1}{y} = C - x, \ y = \frac{1}{C - x},$$

где C — произвольная постоянная. Уравнение имеет еще и нулевое решение — постоянную функцию $y = 0$.

Упражнения. 1. Изобразите поля направлений дифференциальных уравнений: а) $y' = y^2$; б) $y' = -y^2$; в) $y' = y - 1$ — вместе с графиками их решений.

2. Найдите решения дифференциальных уравнений:

а) $y' = \frac{1}{y}$; б) $y' = ky + b$; в) $y' = y^3$.

Итак, наглядно-геометрический подход в данном случае дал с самого начала далеко не очевидный результат — общий метод решения целого класса дифференциальных уравнений. Этот пример далеко не единствен, но и он с достаточной убедительностью показывает, сколь важна наглядная интерпретация тех или иных понятий. Роль наглядности не ограничивается достижением учебно-педагогических целей, наглядность не только вспомогательное средство при решении различного рода задач, она помогает прийти и к глубоким теоретическим выводам.

Е. Г. Глаголева,
Л. О. Денищева,
Б. В. Соронин

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В КУРСЕ IX КЛАССА

В новую школьную программу по математике включены понятия, относящиеся к курсу математического анализа: «предел функции и непрерывность», «производная», «интеграл» и т. д. Ранее эти понятия изучались только в вузовских курсах высшей математики. Введение их в общеобразовательную школу создало ряд проблем, которые настоятельно требуют своего решения. Одна из них — отсутствие достаточно разработанной эффективной методики изложения вопросов математического анализа в средней школе. Как показали наблюдения за ходом преподавания математики, отсутствие у учителей опыта работы по введению таких понятий нередко ведет к механическому переносу в общеобразовательную школу традиционно сложившейся в вузе методики. Так, например, некоторые учителя вводили понятия левостороннего и правостороннего пределов; много внимания уделяли упражнениям на доказательство того, что число b является пределом функции при x, стремящемся к a, а наглядный смысл понятия «предел функции» оставался зачастую в тени. Такое механическое перенесение вузовской методики является неправомерным в силу различия целей и условий обучения в высшей и средней школе. Оно является одной из причин недостатков в знаниях учащихся, которые были выявлены при анализе результатов контрольных работ, при устном опросе учащихся и посещении уроков.

Остановимся подробнее на некоторых недостатках в знаниях учащихся, возникающих при изучении вопросов, связанных с непрерывностью и пределом функции. Как правило, учащиеся осваивают элементарную технику вычисления предела. Однако, правильно вычислив предел функции в точке, учащиеся затрудняются, а порой и совсем не могут схематично изобразить график функции в окрестности этой точки. Более того, по готовым рисункам графиков функций учащиеся не могут ответить на вопросы: а) Имеет ли данная функция предел при $x \to a$? б) Непрерывна ли функция в точке $x = a$?

Выявленные недостатки в знаниях учащихся показывают, что школьники не понимают (или перед ними недостаточно раскрывают) содержательную сторону изучаемых понятий, хотя они владеют некоторыми оперативными навыками.

Одним из путей устранения отмеченных недостатков является отыскание таких подходов, которые будут способствовать раскрытию наглядной смысловой стороны изучаемого материала. Часто учителя стараются поскорее «проскочить» изложение вопроса о пределе и перейти к изучению производной, считая, что понятие предела является вспомогательным и к тому же наглядный смысл производной общеизвестен и поэтому легче и для учителя, и для учащегося. Между тем понятие предела и связанное с ним понятие непрерывности имеют не менее яркий наглядный смысл.

Существуют различные подходы к изучению понятия предела функции. Один из них — изучение предела на основе непрерывности. Такой подход можно встретить, например, в книге О. С. Ивашева-Мусатова «Начала математического анализа»*, в пособии для ПТУ по алгебре и началам анализа** авторов О. С. Ивашева-Мусатова и С. И. Шварцбурда.

В предлагаемой статье излагается еще один из возможных подходов к формированию понятий непрерывности и предела функции.

Этот подход основывается на следующих соображениях:

а) Понятия непрерывности и предела функции должны вначале формироваться на основе наглядно-интуитивных представлений, т. е. формально-логическое введение определения предела предваряется разъяснением смысла с максимальным использованием наглядности и предшествующего опыта учащихся. Соответственно и оценка уровня усвоения понятий должна проводиться в основном не по умению воспроизвести определения предела функции в точке или непрерывности функции в точке, а на уровне «распознавания», т. е. учащийся должен в конкретных случаях ответить на вопросы, имеет ли функция предел в точке, непрерывна ли она и т. п.

б) Понятия предела функции в точке и непрерывности функции должны с самого начала изучения вводиться в тесной взаимосвязи с раскрытием отношений между ними.

в) Определение понятия непрерывности функции в точке формируется с опорой на характеристическое свойство непрерывной функции: значения функции, непрерывной в точке x_0, мало меняются при малых изменениях аргумента, т. е. $f(x) \approx f(x_0)$, если $x \approx x_0$.

Изучение темы целесообразно начать с повторения сведений о функции, полученных учениками в восьмилетней школе. Здесь полезно вспомнить, что́ такое соответствие между множествами

---

* См.: Ивашев-Мусатов О. С. Начала математического анализа. М., Наука, 1973.

** Шварцбурд С. И., Ивашев-Мусатов О. С. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для средн. проф.-техн. училищ. М., Высшая школа, 1977.

(см. «Алгебра 6»); учитывая, что в переработанном курсе этот термин заменен на термин («отношение»), можно сообщить его учащимся, употребляя слова «соответствие» и «отношение» как синонимы. Затем следует напомнить определение функции, обратив внимание на видовое отличие функционального отношения (наличие не более одного образа), и рассмотреть примеры соответствий:

а) См. рис. 1 в статье Л. О. Денищевой, с. 78.

б) См. рис. 2 в статье Б. В. Сорокина, с. 105.

в) Список оценок за контрольную работу (например, по геометрии в этом классе).

г) $y = x + 5$.

д) $(m; 2)$, $(m; 3)$, $(c; 6)$.

е) Каждому треугольнику ставится в соответствие число, являющееся его площадью (при выбранной единице измерения).

Выделив из этих или других примеров отношения, являющиеся функциями, нужно отработать понятия области определения и множества значений функции, различные способы задания функции, вспомнить смысл символов $f(x)$ и $f(a)$.

Далее можно перейти к определению числовой функции, сообщив учащимся, что функция называется числовой в случае, когда ее область определения и множество значений — числовые множества; ввести обозначения: $D(f)$ для области определения функции и $E(f)$ для множества ее значений.

Говоря о графике числовой функции, следует разъяснить учащимся, что это множество таких точек координатной плоскости, абсциссы которых — числа из области определения функции, а ординаты — соответствующие значения функции. Символически это множество можно записать так: $\{(x; y) \mid x \in D(f),\ y = f(x)\}$. Здесь же нужно обратить внимание учащихся на то, что не всякое множество точек координатной плоскости, даже не всякая линия может служить графиком функции.

Далее нужно позаботиться о создании у учащихся «запаса» различных функций и четких представлений об их графиках. Прежде всего следует убедиться, что все учащиеся имеют правильное представление о графиках функций, которые встречались им в курсе восьмилетней школы (в дальнейшем этот набор мы будем называть «азбукой» функций):

$$y = kx + b,\ y = ax^2 + bx + c,\ y = a^x,\ y = |x|,$$

$$y = [x],\ y = \frac{k}{x},\ y = x^n, \text{ где } n \in N,\ y = \log_a x,\ y = \frac{1}{x^2},\ y = \sqrt{x}.$$

Это можно сделать по-разному: или предложить нескольким учащимся на доске построить графики указанных функций (нечто вроде самостоятельной работы), или заранее заготовить графики функций и отдельно в другом порядке выписать соответствующие формулы, после чего предложить учащимся установить соответствие между графиками и формулами.

Учащиеся должны правильно представлять ход графика, уметь нарисовать его эскиз (например, прямую $y = kx + b$ по двум точкам, параболу по трем — см. «Алгебра 7»), уметь ответить на вопросы, каковы область определения и множество значений функции, на каких промежутках функция убывает (возрастает), в каких точках она обращается в нуль, где положительна, где отрицательна и т. п. На все эти вопросы учащиеся отвечают по графику. Не следует здесь требовать какого-либо аналитического обоснования, так как цель — напомнить учащимся о связи свойств функции с графическим ее представлением.

Кроме работы с «азбукой», надо начать создавать запас наглядных примеров, которые принесут пользу при изучении темы «Предел функции и непрерывность».

Как правило, для ученика просто то, что ему уже знакомо. Так, например, если он впервые встретится с графиком функции

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

только при разъяснении понятия предела (где этот график удобно использовать), то у него, несомненно, возникнут затруднения, получится наложение двух трудностей. Если же ознакомить его с подобными графиками (графиками разрывных функций) заранее, то при введении понятия предела функции этот график уже сможет служить наглядным средством и будет облегчать усвоение нового понятия. С этой целью можно предложить построить схематически графики таких функций:

$$1)\ y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}; \quad 2)\ y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}; \quad 3)\ y = \frac{|x|}{x};$$

$$4)\ y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x > 1, \\ x - 1 & \text{при } x \leqslant 1; \end{cases} \quad 5)\ y = \begin{cases} 1 & \text{при } x > -1, \\ x^2 & \text{при } x \leqslant -1. \end{cases}$$

Рассмотрим построение графика функции

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Функция определена при всех действительных значениях x, кроме $x = 1$, т. е. $D(f) =]-\infty; 1[\cup]1; \infty[$. Для любого $x \neq 1$ имеем: $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$, т. е. функция $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ есть функция $y = x + 1$, заданная на всей числовой прямой, кроме $x = 1$. Поэтому график функции $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ совпадает с графиком функции $y = x + 1$ для $x \in]-\infty; 1[\cup]1; \infty[$, т. е. это прямая с «выколотой» точкой. Аналогично график функции $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ — прямая $y = x + 2$ с «выколотой» точкой, абсцисса которой равна -1.

Упражнения, связанные с повторением сведений о функциях, должны быть достаточно разнообразны, именно тогда они дадут возможность развивать различные умения: при отработке символики уметь вычислять и проводить тождественные преобразования, при отыскании области определения уметь решать уравнения, неравенства и их системы и т. п.

Для пропедевтики понятий предела и непрерывности полезно выполнить серию упражнений типа:

по графику функции указать значения x, для которых:

1) $f(x) = a$;
2) $f(x) > a$, $f(x) < a$;
3) $f(x) > f(x_0)$, $f(x) \leqslant f(x_0)$;
4) $|f(x) - a| < \varepsilon$;
5) $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Эти упражнения нужно рассматривать на конкретных графиках с конкретными значениями a, ε, x_0. Задания указаны в порядке возрастания сложности. Самым важным из них является последнее. Его нужно предложить учащимся и в других формулировках:

«Для каких значений x значения $f(x)$ отличаются от $f(x_0)$ менее чем на ε?»

«Для каких значений x значения $f(x)$ удалены от $f(x_0)$ менее чем на ε?»

«Укажите окрестность точки x_0, в которой выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$».

«Укажите окрестность точки x_0, в которой значения $f(x)$ приближенно равны значению $f(x_0)$ с точностью до ε».

«Какова должна быть точность приближенного равенства $x \approx x_0$, чтобы равенство $f(x) \approx f(x_0)$ выполнялось с точностью до ε?»

При разборе этих упражнений нужно обратить внимание учащихся на эквивалентность трех утверждений: «$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$»; «Значения $f(x)$ лежат в окрестности $f(x_0)$ радиуса ε»; «$f(x) \approx f(x_0)$ с точностью до ε».

Разбор указанного материала вполне достаточен, чтобы перейти собственно к введению понятий непрерывности и предела. Основной задачей при этом будет разъяснение этих понятий на интуитивно-наглядном уровне.

Прежде всего заметим, что в школьном курсе понятие непрерывности фактически рассматривается для функций, область определения которых является или промежутком, или объединением промежутков. Поэтому непрерывность функции имеет простой наглядный смысл: функция непрерывна в точке x_0, если ее график не прерывается при $x = x_0$, т. е. при проведении графика через эту точку можно не отрывать карандаша от бумаги.

Для разъяснения различия между функциями непрерывными и не являющимися непрерывными в некоторых точках удобно использовать примерно такой набор графиков:

1) $y = x + 1$; 2) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$;

3) $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{при } x \neq 1, \\ 3 & \text{при } x = 1; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{при } x \neq 1, \\ 2 & \text{при } x = 1; \end{cases}$

5) $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{при } x \neq 1, \\ 2{,}001 & \text{при } x = 1; \end{cases}$

6) $y = \dfrac{|x|}{x}$

(графики функций 1) — 5) отличаются друг от друга только одной точкой).

Эти графики (их учащиеся должны построить быстро, так как они все знакомы) и послужат «наглядным пособием» в работе при формировании понятий о непрерывности функции в точке и предела.

Далее учащимся следует пояснить:

1) Если график функции в точке x_0 не «разрывается», то говорят, что функция в этой точке непрерывна (слово «разрывается» поставлено в кавычки, так как нами не определено точно, что значит разрывается).

2) Если график функции в точке x_0 «разрывается», то говорят, что функция не является непрерывной в точке x_0*.

Понимание этих пояснений можно проверить, например, на таких упражнениях:

1. Среди функций 1—7 укажите непрерывные в точке $x = 1$; $x = 0$;

2. Среди функций 1—7 укажите: а) непрерывные в каждой точке числовой прямой; б) не являющиеся непрерывными в некоторой точке (укажите, в какой именно).

При наличии времени можно задать аналогичные вопросы по функциям «азбуки».

Если эти вопросы не вызовут затруднений — а это обычно бывает так,— можно перейти к более сложным, но очень важным заданиям.

Изобразить график какой-либо функции f:

а) не являющейся непрерывной в точке $x = -2$, но определенной в этой точке;

б) не являющейся непрерывной только в точке $x = -2$ и не определенной в этой точке;

в) имеющей две точки, в которых она не является непрерывной;

г) непрерывной в каждой точке, кроме $x = 1$, причем $f(1) = 3$;

д) непрерывной во всех точках числовой прямой. И т. п.

---

* Заметим, что в этом пояснении не поднимается вопрос о том, является ли точка x_0 точкой разрыва функции. По современной терминологии точкой разрыва называют только точку области определения функции. Например, $x = 0$ не является точкой разрыва функции $y = \dfrac{1}{x}$, тангенс не имеет точек разрыва. Это может несколько сбивать учащихся. Разъяснение этой тонкости не является существенным для понимания дальнейшего курса.

После того как учащиеся усвоят наглядный смысл непрерывности, можно переходить к следующему этапу: разъяснению характеристического свойства непрерывной функции (см. п. «в») на с. 3).

Полезно разъяснить учащимся, что большое внимание к непрерывным функциям объясняется их широкой применимостью, которая, в свою очередь, связана с тем, что в реальных процессах изменение величин происходит без скачков, т. е. малым изменениям аргумента соответствуют малые изменения функции.

Разъяснение характеристического свойства функции, непрерывной в точке, можно провести, рассматривая какой-либо график, например график функции

$$y = \begin{cases} 2x^2 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 1 - 2x \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

При этом выясняются следующие вопросы:

1) Чему равно $f(2)$, $f(0{,}25)$, $f(1)$? (Ученики должны выбрать нужную формулу и вычислить результат.)

2) Пусть $x = 2{,}0001$. Как вычислить $f(x)$? (Ученик должен сказать, по какой формуле он будет вычислять; если же он сразу скажет, что получится приблизительно $f(2)$, этот ответ нужно поощрить.)

3) Пусть $x \approx 2{,}00001$ или $x \approx 1{,}999999$. Чему приближенно равно $f(x)$?

4) Пусть $x \approx \frac{1}{3}$, например $x = 0{,}333$. Можно ли сказать, что $f(x)$ приближенно равно $f\left(\frac{1}{3}\right)$?

5) Пусть $x \approx 2$. Чему равно приближенно $f(x)$?

Отвечая на все эти вопросы, учащиеся заметили, что если $x \approx x_0$, то $f(x) \approx f(x_0)$.

После этого нужно поставить перед учащимися следующий вопрос: «Было выяснено, что $f(1) = 2$. Можно ли утверждать, как и в предыдущих случаях, что если $x \approx 1$, то $f(x) \approx f(1)$?» По графику учащиеся заметят, что этого утверждать нельзя. Рассмотрев другие примеры: $y = [x]$ при $x = 1$, $y = \frac{|x|}{x}$ при $x = 0$ и т. п., делаем вывод, что для непрерывной в точке x_0 функции справедливо утверждение: если $x \approx x_0$, то $f(x) \approx f(x_0)$*.

---

* Это предложение записывать не следует, так как оно нуждается в уточнении. Действительно, здесь ничего не говорится о точности приближения. Например, так как $2 \approx 0$ (хотя бы с точностью до 5), то и для функции

$$y = \begin{cases} 2 - x \text{ при } x < 0, \\ x \text{ при } x \geqslant 0 \end{cases}$$

можно сказать, что $f(0) \approx f(1)$, если $x \approx 0$. Однако в этом месте, если нет вопросов учащихся, подробнее останавливаться, по-видимому, не стоит, так как основная цель — понять, что значение непрерывной функции в точке x_0 является приближенным значением для этой функции при x, близких к x_0, т. е. в некоторой окрестности точки x_0.

Если же f не является непрерывной в точке x_0, то для нее это утверждение несправедливо.

Дать почувствовать учащимся естественность характеристического свойства непрерывной функции можно, разбирая такие вопросы: «Чему приближенно равна площадь квадрата, если длина его стороны примерно 3 м?»; «Какой примерно путь пройдет пешеход, движущийся со скоростью 5 км/ч примерно за 2 часа?»

Учащиеся должны понять, что возможность дать ответ связана с непрерывностью функций $S(x) = x^2$ в точке $x = 3$ и $S(t) = 5t$ в точке $x = 2$.

После усвоения учащимися характеристического свойства непрерывной функции можно перейти к формированию понятия предела функции, непрерывной в точке. Для этого полезно вспомнить определение предела последовательности: равенство $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = a$ означает, что для любого положительного ε, начиная с некоторого номера (т. е. для всех $n > N$), выполняется неравенство $|u_n - a| < \varepsilon$. Другими словами, $u_n \approx a$ с точностью до ε для всех достаточно больших n. Сравнив равенство $u_n \approx \lim\limits_{n \to \infty} u_n$ (для $n > N$) с равенством $f(x) \approx f(x_0)$ (для $x \approx x_0$) для функции, непрерывной в точке x_0, следует пояснить, почему значение непрерывной в точке x_0 функции называют пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$; учитель подчеркивает, что «если функция непрерывна в точке x_0, то для любого положительного ε для $x \approx x_0$ (т. е. в некоторой окрестности точки x_0) $f(x) \approx f(x_0)$ с точностью до ε». Значит, равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ означает, как и в случае предела последовательности, что $f(x) \approx \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ для $x \approx x_0$. Предложение, взятое в кавычки, уже является точным определением непрерывности функции в точке x_0. Однако мы советуем не записывать его и не отрабатывать, а на примерах проверить, поняли ли ученики «суть дела». Приведем возможные варианты таких примеров:

1) Пусть $f(x) = x^2$. Найти $\lim\limits_{x \to 3} x^2$.

Функция f непрерывна в точке $x = 3$ (график не разрывается в этой точке). Значит, $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = f(3) = 9$. Это равенство означает, что для $x \approx 3x^2 \approx 9$.

Сильным ученикам можно предложить задание: найти по графику окрестность точки $x = 2$, для которой $x^2 \approx 4$, с точностью до 0,1 и т. п.

2) Пусть $f(x) = \{x\}$.

В точке $x = 1{,}5$ эта функция непрерывна (сослаться на график). Кроме того, если $x \approx 1{,}5$, то $f(x) \approx 0{,}5 = f(1{,}5)$, как и должно быть для непрерывной функции. Однако, если взять точку $x = 1$, где функция разрывна, то при $x \approx 1$ $f(x)$ не обязательно близко к $f(1)$. Например, для $x = 0{,}99$ получим: $\{0{,}99\} = 0{,}99$, а для $x = 1{,}01$ будем иметь: $\{1{,}01\} = 0{,}01$.

Вообще для значений x из любой окрестности целого числа нельзя указать приближенное значение этой функции.

Итак, пределом при $x \to x_0$ функции $f(x)$, непрерывной в точке x, является значение этой функции $f(x_0)$ в точке x_0, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, и это означает, что $f(x) \approx \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ для $x \approx x_0$. Однако есть функции, не являющиеся непрерывными в точке x_0, но поведение которых для x, близких к x_0, похоже на поведение непрерывных функций.

Например, пусть

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ при } x \neq 1, \\ 5 \text{ при } x = 1. \end{cases}$$

Для всех x, кроме $x = 1$, функция непрерывна: в точке $x = 1$ функция не является непрерывной. Для $x = 1$ значения функции близки к 2, а не к $f(1) = 5$. Мы видим, несмотря на то что функция не является непрерывной в точке $x_0 = 1$, все-таки существует число, которому приближенно равны значения функции в окрестности этой точки. Число 2 как бы делает функцию непрерывной («закрывает» или, лучше говорить, «устраняет» разрыв графика). После этого нужно дать такое разъяснение:

Если функция f не является непрерывной в точке x_0, но существует некоторое число a, которому приближенно равны значения этой функции в окрестности точки x_0, то это число называется пределом функции f при x, стремящемся к x_0; пишут: $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Эта запись опять означает, что если $x \approx x_0$, то $f(x) \approx a$; точнее, каким бы ни было положительное число ε, можно указать такую окрестность точки x_0, в которой значения функции приближенно равны числу a с точностью до ε. Здесь придется указать, что *приближенное равенство в этом случае не выполняется для самой точки* x_0 — центра окрестности.

Итак, при решении задачи об отыскании предела функции f при $x \to x_0$ могут встретиться такие случаи:

Если функция непрерывна в точке x_0, т. е. при $x \approx x_0$ $f(x) \approx f(x_0)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция не является непрерывной в точке x_0, но существует число a такое, что $f(x) \approx a$ для $x \approx x_0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Если такого числа a не существует, т. е. нельзя сказать, чему приближенно равны значения функции при x, близких к x_0, то говорят, что предела функции f при x, стремящемся к x_0, не существует.

После этого полезно предложить учащимся упражнения на нахождение пределов функций при x, стремящемся к x_0:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$; б) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - x + 1)$; в) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

На этом этапе решение всех примеров обязательно надо сопровождать и даже «обосновывать» ссылкой на график (хотя не обязательно его рисовать). Поэтому все они подобраны так, что учащиеся знают или могут догадаться, каким будет график функции.

Покажем, какое объяснение должны давать учащиеся при выполнении заданий б) и в). Функция $f(x)=x^2-x+1$ является непрерывной на множестве всех действительных чисел (график — непрерывная линия), а значит, и при $x=2$. Поэтому предел равен значению функции в точке 2. Значит, $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x+1)=3$.

В тетради достаточно такой записи:

«$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x+1)=2^2-2+1=3$ (функция непрерывна)».

Функция $y=\frac{x^3+1}{x+1}$ не является непрерывной в точке $x=-1$. Но во всех остальных точках эта функция совпадает с функцией $y=x^2-x+1$. Поэтому пределы этих функций при $x\to -1$ совпадают. Для последней же функции, так как она непрерывна, предел равен значению функции в точке -1. При письменном выполнении этого упражнения можно опускать пояснения и записывать решение так:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=$$
$$=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=2^2-2+1=3.$$

При устном ответе учащиеся должны уметь пояснять, почему возможно сокращение дроби под знаком предела (хотя функции и разные, но во всех точках, кроме $x=x_0$, их значения совпадают, поэтому и их пределы равны), так что мы предел данной разрывной функции заменяем равным ему пределом непрерывной функции.

В заключении этапа формирования у учащихся наглядных представлений о пределе функции в точке полезно совместно с учащимися выяснить, какой вид в окрестности точки x_0 может иметь график функции, имеющей предел при $x\to x_0$. Может быть три основных случая: график не «разрывается» в точке x_0; точка графика, получающаяся при $x=x_0$, «выколота»; точка графика, получающаяся при $x=x_0$, «выскочила».

После того как учащиеся научатся находить пределы функций, графики которых они могут построить или представить себе, можно перейти к нахождению пределов некоторых других функций: например, найти $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^4+2}{3x^3-1}$.

Увидев, что знаменатель дроби при $x=-2$ отличен от нуля, учащиеся, скорее всего, предложат для вычисления предела найти значение функции при $x = -2$. Тогда им следует напомнить, что равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ верно только для функции, непрерывной в точке x_0. Является ли данная функция непрерывной в точке $x = -2$, нам неизвестно.

Далее учитель сообщает учащимся, что при решении таких вопросов помогают теоремы о пределах (формулировки теорем и следствия учащиеся могут прочитать на уроке по учебному пособию самостоятельно). После этого учитель может показать форму записи при решении примеров:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^4 + 2}{3x^3 - 1} = \frac{\lim\limits_{x \to -2} (x^4 + 2)}{\lim\limits_{x \to -2} (3x^3 - 1)} = \frac{\lim\limits_{x \to -2} x^4 + \lim\limits_{x \to -2} 2}{\lim\limits_{x \to -2} 3x^3 - \lim\limits_{x \to -2} 1} = \ldots$$

Такую «длинную» запись вначале следует обязательно потребовать от учащихся, тогда они оценят, а может быть, и сами сформулируют теорему о непрерывности рациональной функции.

Мы не будем подробно останавливаться на методике изучения этой теоремы. Приведем только один из возможных способов оформления упражнений на вычисление предела функции с ее использованием:

«Найти $\lim \frac{x^2 + 3x - 2}{x - 3}$».

Так как при $x = 2$ $x - 3 \neq 0$, то функция $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x - 3}$ непрерывна в точке $x = 2$. Следовательно,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 2}{x - 3} = \frac{2^2 + 3 \cdot 2 - 2}{2 - 3} = -8.$$

Для того чтобы учащиеся могли сознательно вычислять пределы функций, заданных формулами, содержащими радикалы, полезно дать им (разумеется, без доказательства) теорему о непрерывности функции, обратной данной*. «Если f непрерывна в каждой точке интервала и имеет на нем обратную функцию g, то g непрерывна в каждой точке интервала $D(g)$, являющегося областью определения функции g».

Эта теорема дает право писать, что $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = 2$, $\lim\limits_{x \to 4} x^{\frac{5}{2}} = 4^{\frac{5}{2}} =$

$= 32$ и т. д.

Решение можно сопровождать таким примерно пояснением: «Так как функция $y = \sqrt[3]{x}$ является обратной для непрерывной функции $y = x^3$ на промежутке $]0; \infty[$, то она непрерывна в каждой точке промежутка $]0; \infty[$; значит, $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8} = 2$.

* Эта теорема рассматривается в курсе X класса.

Используя, кроме этой теоремы, теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного функций, учащиеся вполне обоснованно могут вычислить, например:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x+9}}.$$

Итогом изучения раздела «Предел функции и непрерывность» обычно является проведение контрольной работы примерно такого содержания («МШ», 1978, № 4, с. 40):

1. Найдите область определения функции $f(x)=\frac{\sqrt{-x}}{x+3}$.

2. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -1}(4x^3-3x^2+2)$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$.

3. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}x-2 \text{ при } x>1,\\ -2x^2 \text{ при } x\leqslant 1.\end{cases}$$

а) Начертите график этой функции.

б) Используя график, укажите ее промежутки возрастания и убывания.

в) Укажите точку, в которой функция не является непрерывной; укажите значение функции в этой точке.

г) Найдите $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

После проведения контрольной работы можно разобраться в строгом определении непрерывности и предела и, если это необходимо, ликвидировать недоработки в технике решения примеров на вычисление пределов.

Целью дальнейшей работы будет разбор следующих определений:

1. «Функция f называется непрерывной в точке x_0, если какое бы положительное число мы ни задали, найдется такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности $f(x)\approx f(x_0)$ с точностью до ε».

2. «Число a называется пределом функции f при x, стремящемся к x_0, если какое бы положительное число мы ни задали, найдется такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности (кроме, может быть, точки x_0) значения $f(x)\approx a$ с точностью до ε».

Фактически об этих определениях ранее уже шла речь. Теперь наша задача — сформулировать их «в явном виде».

Начать можно с повторения наглядного смысла непрерывности (график — непрерывная кривая), например:

1. а) Изобразите график функции, непрерывной в точке 2, причем $f(2)=1$.

б) Чему равен предел этой функции при x, стремящемся к двум?

в) Что означает равенство $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$? (Ответ. $f(x) \approx 1$, если $x \approx 2$.)

2. Пусть $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$, $f(2) = 1$.

а) Изобразите график этой функции в окрестности точки $x = 2$.

б) Является ли функция f непрерывной в точке 2?

в) Что означает равенство $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$? (Ответ. $f(x) \approx 3$, если $x \approx 2$.)

Далее следует напомнить учащимся, что для приближенных равенств обычно указывают точность приближения: так если, например, $f(x) \approx 3$ с точностью до 0,1, то это значит, что $|f(x) - 3| < 0{,}1$.

После этого перед учащимися можно поставить вопрос: с какой точностью надо взять x, чтобы $f(x) \approx f(x_0)$ с точностью до 0,1?

При ответе на этот вопрос сначала показать, как по графику функции (используется рис. 6, полученный при выполнении упражнения 1, а)), зная точность приближения для равенства $f(x) \approx f(x_0)$, найти такую окрестность точки x_0, чтобы для всех x из этой окрестности нужная точность достигалась.

По графику легко увидеть, что для непрерывной функции можно добиться любой точности приближения равенства $f(x) \approx f(x_0)$, если выбрать подходящую окрестность точки x_0. Затем естественно сформулировать определение 1. После этого определение 2 в сильном классе учащиеся могут сформулировать самостоятельно.

Основным результатом работы является понимание и усвоение слов «каким бы ни было положительное число ε, можно подобрать δ». Для этого предлагаются упражнения двух видов:

а) Отыскание по заданному ε радиуса окрестности по графику и аналитически (схема рассуждения при аналитическом решении таких задач приведена в п. 38 «Алгебра и начала анализа, 9»).

б) Доказательство того, что данное число не является пределом функции в какой-либо точке. Например, доказать, что для функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{при } x \neq 1, \\ 2{,}5 & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

число 2,5 не является пределом при x, стремящемся к 1, т. е. функция не является непрерывной в точке 1.

Так как $f(x) = x + 1$ при $x \neq 1$, то в любой окрестности точки $x = 1$ будут такие x, что $f(x) < 2$. Для этих x $|2{,}5 - f(x)| > 0{,}5$. В окрестности точки $x_0 = 1$ найдутся точки, для которых равенство $f(x) \approx 2{,}5$ верно лишь с точностью не выше 0,5. А это и значит, что число 2,5 не является пределом данной функции при x, стремящемся к 1.

Аналогичное задание можно выполнить и по графику, например:

«Доказать, что число 1 не является пределом при x, стремящемся к нулю, функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0». \end{cases}$$

Если взять $\varepsilon = 0,5$, то по графику (рис. 7) видно, что в любой окрестности точки $x = 0$ найдутся точки, для которых $|f(x) - 1| > 0,5$.

После этого по желанию учителя можно перейти к переводу определения предела функции в точке на язык «$\varepsilon - \delta$».

Вначале нужно вновь напомнить учащимся, что равенство $x \approx a$ с точностью до ε означает, что $|x - a| < \varepsilon$, а равенство $f(x) \approx b$ с точностью до 0,01 означает, что $|f(x) - b| < 0,01$ и т. п.

Это замечание позволит «перевести» определение предела, данное на предыдущем уроке, на язык «$\varepsilon - \delta$». Это можно сделать, предложив вниманию учащихся следующую таблицу (ее удобно заранее заготовить на доске):

Число a называется пределом функции при x, стремящемся к x_0, если:

какое бы положительное число ε мы ни задали,	для любого положительного числа ε
найдется δ-окрестность точки x_0, такая, что	найдется положительное число δ такое, что
для всех x из этой окрестности (кроме $x = x_0$) $f(x) \approx a$ с точностью до ε.	для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Предложенная схема изложения позволяет подготовить учащихся к пониманию определения предела, к сознательному его восприятию. Тем не менее мы считаем, что воспроизведение этого определения является необязательным. И вообще, если предыдущий материал усвоен недостаточно хорошо, если многие учащиеся не могут пользоваться тем, что $f(x) \approx \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ для $x \approx x_0$, не могут сообразить, имеет ли функция f предел при $x \to x_0$ и какой, еще не умеют находить пределы функций с использованием теорем о пределах, то заниматься отработкой формулировки определения предела нецелесообразно.

В. А. Далингер

НЕКОТОРЫЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Одной из центральных тем в курсе «Алгебры и начал анализа» IX класса является тема «Применение производной». Если в предыдущей теме — «Предел функции и производная» — понятие производной выступало в качестве предмета изучения, то в данной теме оно является средством изучения других вопросов курса математики. А именно рассматривается применение производной к приближенным вычислениям, построению касательной к кривой, исследованию функции, решению текстовых задач на отыскание наибольших и наименьших значений функций.

Данная тема представляет собой благодатный материал для формирования у учащихся диалектико-материалистического представления о предмете математики. Учитель может показать, как понятие производной используется для изучения многообразных явлений и процессов реального мира, как с помощью этого понятия получают единую трактовку такие понятия, как «скорость химических реакций», «мгновенная скорость прямолинейного движения», «линейная плотность неоднородного стержня», «сила тока в цепи» и т. д.

Несмотря на то что математика является одной из самых абстрактных наук, учитель при изучении данной темы должен показать учащимся, что абстрактность эта не означает оторванности ее понятий от понятий действительного мира. Глубина идей, заложенных в тех или иных математических понятиях, позволяет найти им приложения в различных сферах. А значит, основная задача учащихся будет состоять не в заучивании суммы фактов, а в уяснении общих подходов и методов.

Изучение темы начинается с вопроса о применении производной к приближенным вычислениям.

На первый взгляд этот вопрос может показаться частным и, судя по названию, сугубо прикладным. На деле же изучение этого вопроса дает учащимся возможность «прикоснуться» к очень серьезным и глубоким теоретическим сведениям об изучении функций методами математического анализа и служит хорошим фундаментом для разъяснения материала о касательной к графику функции, а также об исследовании функций с помощью производной. Кроме того, формула, выражающая приближенные значения дифференцируемой функции, дает возможность на вполне доступном для учащихся уровне ознакомить их с общей идеей аппроксимации (приближения). Учащиеся часто спрашивают: «Вот мы умеем, зная формулу, задающую функцию, построить ее график; а можно ли решить обратную задачу: по графику найти формулу, позволяющую вычислять значения функции?» Или: «Как составляется таблица значений синуса?» Изучение формулы

$$f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (1)$$

дает возможность дать представление о решении этих вопросов.

Учителю ясно, что эта формула, изучаемая в школе, является частным случаем решения задачи приближения функции многочленом с помощью формулы Тейлора: значения функции, n раз дифференцируемой в точке x_0, выражаются формулой

$$f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}\Delta x^n. \qquad (2)$$

Чем больше слагаемых мы оставляем в этой формуле, тем более точное приближение получаем. Следовательно, если функция имеет производные любого порядка, то ее можно приблизить многочленом с какой угодно точностью. Так получаются ряды для функций $\sin x$, $\cos x$, для e^x и $\ln x$ и т. д. Геометрически это означает, что график функции, n раз дифференцируемой в точке x_0, вблизи этой точки можно приблизительно считать графиком некоторого многочлена n-й степени.

Конечно, нет ни возможности, ни необходимости разбирать с учащимися этот вопрос в таком общем плане. Но внимание к постановке задачи, отдельные реплики и примеры не только расширят кругозор учащихся, поднимут их интерес к изучению материала, но и, по нашему мнению, помогут преодолеть некоторые методические трудности.

Одной из таких трудностей, как показал опыт, является переход от равенства $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ к равенству $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \times \Delta x$. Возникновение этой трудности можно предотвратить уже при постановке проблемы, начав изложение примерно таким пояснением:

«Вы знаете, что для функции f, непрерывной в точке x_0, выполняется равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. С другой стороны, если функция в некоторой точке x_0 имеет предел, то ее значения вблизи x_0 приближенно равны этому пределу, т. е.

$$f(x) \approx \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ для } x \approx x_0 \qquad (3).$$

Отсюда следует, что для непрерывной в x_0 функции ее значение вблизи x_0 можно приближенно вычислять по формуле $f(x) \approx f(x_0)$. Мы сегодня покажем, что если f не только непрерывна в x_0, но и дифференцируема в этой точке, то можно получить формулу для вычисления значений этой функции с более высокой точностью».

Так как в этом вступлении напоминается равенство (3), то теперь вывод формулы получится без труда: так как $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то для $\Delta x \approx 0$ выполняется равенство $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$, откуда $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Поставлена во вступлении и другая задача — оценить погрешность полученной формулы. Следует иметь в виду, что для ряда учащихся оказываются трудными рассуждения, проведенные в учебнике в общем виде для оценки остаточного члена $R(\Delta x)$. Это общее рассуждение слишком сложно, так как на деле здесь в скрытой форме ведется разговор о сравнении бесконечно малых. Преодолеть эту сложность можно, заменив общее рассуждение конкретным примером, используя то, что в частном случае (для многочлена) величину отбрасываемого члена можно легко оценить. Итак, чтобы оценить погрешность рассматриваемой формулы, на уроке разбирается пример. Пусть $f(x) = x^3 - 3x$. Тогда наша формула дает:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx x_0^3 - 3x_0 + (3x_0^2 - 3)\,\Delta x.$$

Вычислим теперь $f(x_0 + \Delta x)$ точно:

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3 - 3(x_0 + \Delta x) =$$
$$= x_0^3 - 3x_0 + (3x_0^2 - 3)\,\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3. \tag{4}$$

Мы видим, что, вычисляя по приближенной формуле, мы отбрасываем два слагаемых с Δx^2 и Δx^3. Если $|\Delta x|$ мало, т. е. если мы вычисляем значения функции в точке, близкой к точке x_0, то эти слагаемые еще меньше «более высокого порядка малости». Что это значит, видно из таблицы.

Таблица 1

Δx	Δx^2	Δx^3
0,01	0,0001	0,000001
0,001	0,000001	0,000000001
0,0001	0,00000001	0,000000000001

Приведенные рассуждения показывают, что, чем меньше $|\Delta x|$, тем точнее приближение, получающееся при отбрасывании двух последних слагаемых в равенстве (4).

В заключении такого разъяснения следует сказать, что и для других функций погрешность будет зависеть от Δx таким же образом.

Конечно, такой подход к выводу оценки погрешности формулы не может претендовать на общность рассуждений, но преимущество его состоит в том, что он более доступен учащимся.

Пример с многочленом дает возможность просто показать подход к обобщению формулы (1): если оставить в равенстве (4) не два, а три слагаемых, то погрешность еще уменьшится, так как отбрасываемый член $(\Delta x)^3$ при малых $|\Delta x|$ еще меньше, чем $(\Delta x)^2$. Здесь уместно сообщить, что в ряде случаев можно получить для функции формулу, позволяющую вычислять ее значения еще более точно. Например, записав формулы

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{\sqrt[n]{x_0}}{n\cdot x_0}\Delta x,\quad \frac{1}{x_0+\Delta x}\approx\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2}\cdot\Delta x,$$

учитель сообщает, что можно записать и более точные формулы:

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\cdot\Delta x+\frac{\sqrt[n]{x_0}}{n(n-1)\cdot 2!\cdot x_0^2}\cdot\Delta x^2,$$

$$\frac{1}{x_0+\Delta x}\approx\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2}\cdot\Delta x+\frac{1}{x^3}\cdot\Delta x^2,$$

и даже формулы, дающие сколь угодно малую погрешность.

Такая краткая реплика даст возможность при изучении функций $\sin x$, e^x, $\ln x$ и др. сообщить учащимся, что линейные приближения для этих функций могут быть продолжены и даже «бесконечно»:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

$$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Таким образом, получение формулы (1) предстанет перед учащимися как частный случай решения общей задачи приближения функции многочленом, что дает возможность заменять сложные вычисления простым. Этот прикладной смысл формулы (1) на уроках иллюстрируется обычно или на примере извлечения корня, или на примере обратной пропорциональности: действительно, умножать проще, чем делить, а извлекать корень, например, пятой степени учащиеся вообще не умеют. Однако значение этой формулы учащиеся оценят лишь в том случае, если увидят, что вычисления действительно упрощаются. Поэтому, в частности, не следует особенно увлекаться отработкой общей формулы

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{\sqrt[n]{x_0}}{n\cdot x_0}\cdot\Delta x,$$

которая все-таки требует довольно громоздких вычислений. Полезней и интересней для учащихся дать ее очень простой частный случай для приближенного извлечения корня из чисел, близких к единнце. Действительно, для $x_0 = 1$ имеем:

$$\sqrt[n]{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{n} \cdot \Delta x.$$

Например, $\sqrt[5]{1{,}03} \approx 1 + \frac{0{,}03}{5} = 1{,}006$; $\sqrt[3]{1{,}02} \approx 1{,}007$ и т. д.

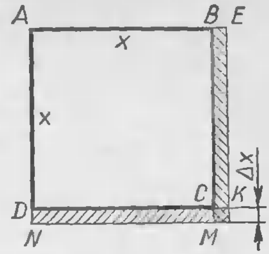


Рис. 1

При возможности следует сказать и то, что эта частная формула верна и для степенных функций с целым показателем: $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$. В этом случае она получается тривиально: например, если $f(x) = x^3$, то $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$, и наша приближенная формула получается просто отбрасыванием членов с высшими степенями Δx.

Для наглядной иллюстрации полученной формулы можно использовать геометрические примеры:

1. Пусть мы имеем функцию $S(x) = x^2$, т. е. рассматриваем площадь квадрата как функцию длины его стороны (рис. 1). Дадим стороне x приращение Δx; будем иметь квадрат со стороной $x + \Delta x$. Тогда полное приращение $\Delta S(x)$ площади квадрата будет таким:

$$\Delta S(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Второе слагаемое $(\Delta x)^2$ есть не что иное, как площадь квадрата $CKFM$. Если мы отбросим это слагаемое, то получим приближенное равенство $\Delta S(x) \approx 2x\Delta x$. Выражение $2x\Delta x$, являющееся суммой площадей прямоугольников $BEKC$ и $DCMN$, есть произведение производной функции $S'(x) = 2x$ на приращение аргумента Δx, т. е. имеем: $\Delta S(x) \approx S'(x)\Delta x$.

2. Аналогичную картину мы наблюдаем, рассматривая приращение площади круга. Пусть радиус круга равен $r = |OA|$. Тогда площадь его, как функция радиуса, выражается формулой $S(r) = \pi r^2$. Дав радиусу r приращение Δr, можем заметить, что $\Delta S(r) \approx 2\pi r \cdot \Delta r$, т. е. площадь заштрихованного кольца (рис. 2) приближенно равна произведению длины окружности радиуса r на ширину кольца, т. е. на приращение Δr. Множитель $2\pi r$, стоящий в правой части равенства, есть производная функции S; $S'(r) = 2\pi r$, т. е. мы снова имеем формулу $\Delta S(r) \approx S'(r) \cdot \Delta r$. Чем тоньше кольцо, т. е. чем меньше Δr, тем меньше будет погрешность при замене площади кольца выражением $2\pi r \cdot \Delta r$.

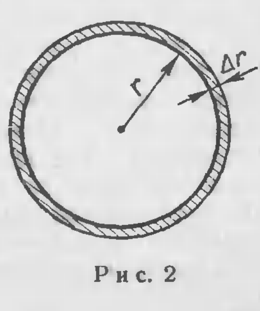


Рис. 2

Если учащиеся усвоят, что формула (1) дает возможность приблизить всякую дифференцируемую функцию некоторой линейной, то это даст возможность разъяснить не толь-

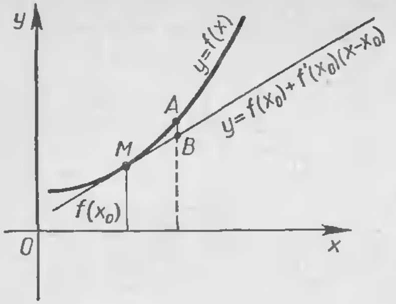


Рис. 3

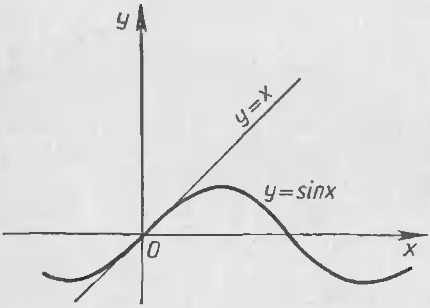


Рис. 4

ко получение уравнения касательной, но и само понятие касательной. Традиционно касательную трактуют как предельное положение секущей. Однако остается вне поля зрения важнейшее свойство касательной: касательная из всех прямых, проходящих через точку с абсциссой x_0, теснее всех прилегает к кривой. Такая трактовка сразу же позволяет использовать формулу (1): касательной к графику $y = f(x)$ в точке x_0 является график той линейной функции, которая приближает $f(x)$.

Поэтому, рассмотрев формулу $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, при изучении вопроса о касательной к графику функции учащимся целесообразно сообщить, что геометрический смысл этой формулы состоит в том, что ордината точки графика функции $y = f(x)$ заменяется ординатой соответствующей точки касательной. Следует этот вывод проиллюстрировать на чертеже (см. рис. 3). Из рисунка 3 видно, что ординату точки A, равную $f(x_0 + \Delta x)$, можно приближенно заменить ординатой точки B, лежащей на касательной, проведенной к кривой в точке $M(x_0, f(x_0))$ (ордината точки B равна $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$).

Проиллюстрируем формулу (1) еще несколькими примерами. Известно, что значение синуса для достаточно малых значений аргумента приближенно равно значению аргумента. Это свойство связано с только что рассмотренным геометрическим смыслом формулы (1).

Действительно, построив график функции $y = \sin x$ и проведя касательную к этому графику в точке (0; 0) (см. рис. 4), мы замечаем, что ею будет служить прямая $y = x$. И тогда, при вычислении значения синуса малых углов, мы заменяем искомую ординату точки графика $y = \sin x$ ординатой соответствующей точки касательной; а так как касательная есть $y = x$, то, значит, искомое значение синуса мы заменяем соответствующим значением аргумента: $\sin x \approx x$. Так, вычисляя значение синуса для угла в один градус, мы, переводя градусы в радианы, будем иметь: $\sin 1° = \sin 0{,}017 \approx \approx 0{,}017$.

Подобную картину мы наблюдаем и в случае вычисления для малых углов значений тангенса. В точке (0; 0) график функции тангенс имеет касательной прямую $y = x$ (в этом можно убедиться, подставив в формулу уравнения касательной $y = f'(x_0) - (x - x_0) + f(x)$ необходимые значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ для функции tg). Тогда, вычисляя значения тангенса для малых углов, мы приближенно заменяем эти значения значениями аргумента, выразив их предварительно в радианах (см. рис. 5).

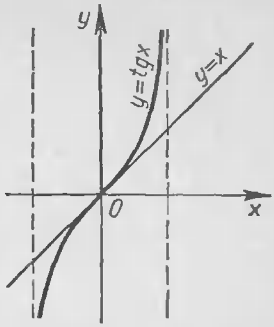


Рис. 5

З а м е ч а н и е. Приближенное равенство $\sin x \approx x$ дает значение синуса (для $x > 0$) с избытком. На рисунке 4 это иллюстрируется тем, что график функции sin расположен для $x \approx \approx 0$ ниже прямой $y = x$.

В случае тангенса его значение для малых положительных углов подсчитывается с недостатком; соответственно график функции tg расположен для $x \approx 0$ выше прямой $y = x$.

Последние два примера могут быть использованы учителем при изучении в X классе производных тригонометрических функций.

При изучении вопроса о построении касательной к графику функции учителю следует обратить внимание учащихся на следующие два факта:

1. Если производная функции в какой-либо точке существует, то это означает, что к графику функции в этой точке можно провести касательную, и притом только одну; если же производная в какой-либо точке не существует, то такой касательной провести нельзя или касательная вертикальна. К примеру, пусть задана функция $y = x^{\frac{2}{3}}(x - 2)$. Ее производная $y' = \frac{5x - 4}{3\sqrt[3]{x}}$ существует на всей числовой прямой, кроме $x = 0$, и мы можем заметить, что и касательная к кривой в этой точке вертикальна (см. рис. 6).

2. Если производная функции в какой-либо точке равна нулю, то это означает, что угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в этой точке, равен нулю, а из этого, в свою очередь, следует, что касательная, проведенная к графику функции, в этой точке параллельна оси Ox (см. рис. 7 и 8). Уяснение учащимися этих двух фактов облегчит им в дальнейшем построение графиков функции.

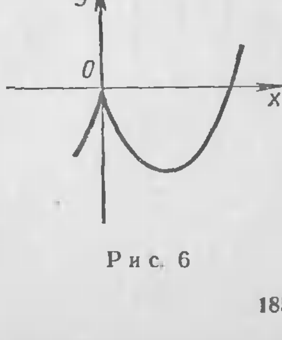


Рис. 6

Остановимся на этом.

Исследование функции с помощью производной проводится по общей схеме:

а) нахождение области определения функции;

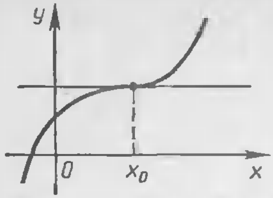


Рис. 7

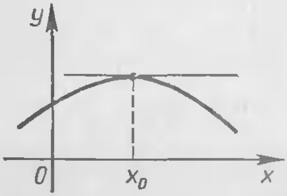


Рис. 8

б) нахождение производной функции;

в) нахождение критических точек данной функции;

г) нахождение промежутков монотонности и экстремумов функции;

д) построение графика функции.

Следует отметить, что первые четыре пункта этого плана не вызывают у учащихся затруднений. Значительно бóльшую сложность для них представляет пятый пункт плана, когда учащийся по уже проведенному исследованию, оформленному в виде таблицы, должен построить график функции.

При этом наибольшее число ошибок учащиеся допускают при построении графика в экстремальных точках и точках, близлежащих к ним. Приведем примеры наиболее типичной ошибки такого рода.

График функции $y = x^4 - 2x^2 - 3$ должен быть таким, как он изображен на рисунке 9. Учащиеся же представляют его в таких видах, как изображено на рисунках 10, 11, 12.

Эти ошибки происходят из-за того, что учащиеся при построении графика функции берут во внимание лишь характер монотонности функции и то, какой экстремум имеет функция в той или иной экстремальной точке, забывая при этом учесть, существует ли производная функции в этих точках, и если да, то каково ее значение.

Действительно, график (см. рис. 12) построен так, что в точках (—1; —4); (0; —3); (1; —4) к кривой нельзя провести касательных, в то время как производная функции в этих точках существует (она равна нулю), а значит, проведение касательных возможно.

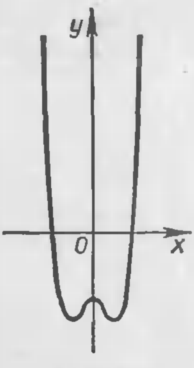


Рис. 9

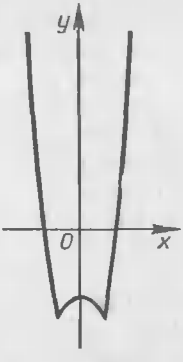


Рис. 10

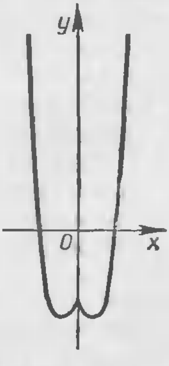


Рис. 11

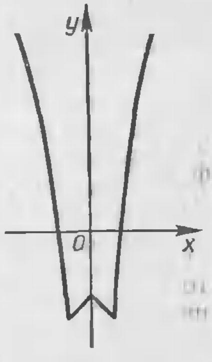


Рис. 12

Таблица 2

x	$-\infty<x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<\infty$
$y^1(x)$	—	0	+	0	—	0	+
$y(x)$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗
		min		max		min	

Следовательно, при построении графика функции учащиеся должны уметь сопоставить ход кривой в окрестностях экстремальных точек с тем, возможно ли проведение касательных или нет, причем в случае равенства нулю производной функции в этих точках касательные должны быть параллельны оси Ox.

Так, в данном случае при построении графика функции $y = x^4 - 2x^2 - 3$ учащиеся оформляют проведенное исследование в виде таблицы (см. табл. 2). Затем следует в системе координат отметить точки (—1; —4), (0; —3); (1; —4) (см. рис. 13).

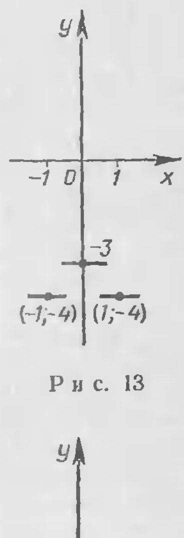


Рис. 13

Учитывая, что касательные, проведенные к графику функции в этих экстремальных точках, параллельны оси Ox (это следует из равенства нулю угловых коэффициентов, так как $y'(-1) = y'(0) = y'(1) = 0$, проведем в этих точках прямые, параллельные оси Ox (см. рис. 13). Это оградит ученика от указанной выше ошибки, а именно кривую в этих точках он будет проводить так, чтобы проведенные прямые служили бы для нее касательными (см. рис. 14).

Большое значение при изучении данной темы имеет вопрос о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке. При рассмотрении этого вопроса следует в первую очередь уточнить, что такое «наибольшее» и «наименьшее» значения функции в промежутке. Учащийся должен уяснить себе при этом, что наибольшее (наименьшее) значение функции на промежутке есть самое большое (самое маленькое) значение из всех значений, которые функция принимает на этом промежутке. После чего проводится работа по выяснению того, в каких точках промежутка это наибольшее или наименьшее значение может быть достигнуто. Особо важно при этом подчеркнуть требование о дифференцируемости функции в

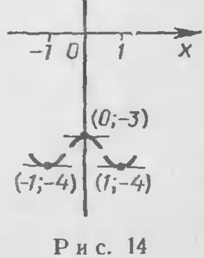


Рис. 14

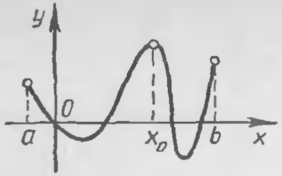


Рис. 15

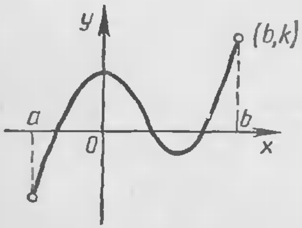


Рис. 16

промежутке, на основании которого делается вывод о том, что функция должна быть в промежутке непрерывна.

Иллюстрируя отыскание наибольшего и наименьшего значений функции соответствующим правилом, приведенным в учебнике, учитель должен иметь в виду, что оно сформулировано для промежутка. А под ним мы понимаем любой промежуток вида $[a; b]$; $[a; b[$; $]a; b]$; $]a; b[$. А если так, то в случае промежутков $[a; b[$; $]a; b]$; $]a; b[$ находить значения функции на обоих концах их, как того требует правило, невозможно (в первом случае возможно его найти лишь в точке a, во втором случае — в точке b).

В учебнике рассмотрены примеры нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на промежутках вида $[a; b]$; $[a; b[$. Желательно для каждого вида промежутка, на котором отыскивается наибольшее или наименьшее значение функции, привести соответствующие чертежи. К примеру, в случае промежутка вида $]a; b[$ возможны такие варианты (для краткости остановимся лишь на отыскании наибольшего значения функции). На рисунке 15 функция достигает свое наибольшее значение в точке экстремума x_0. На рисунке 16 функция на промежутке $]a; b[$ не достигает своего наибольшего значения. (Отметим для учителя, что левосторонний предел в точке b равен k, в то время как значения функции как угодно близко подходят к значению k, но не достигают его, так как функция в точке b не определена.)

Среди всего материала, касающегося применения производной, наибольшую сложность у учащихся вызывают текстовые задачи на экстремум. Учителю полезно подчеркнуть, что способ решения задач с помощью применения производной, есть своего рода универсальный способ, так как он распространяется на любой из видов задач, независимо от содержания.

Чтобы решить такую практическую задачу, следует вначале переформулировать ее в математических терминах (строится математическая модель этой задачи), затем решают ее математическими методами (в данном случае применяется производная), после чего полученный результат интерпретируется в терминах предложенной задачи.

Общеизвестно, что решение любой задачи может быть облегчено выработкой определенного плана, алгоритма ее решения, а поэтому целесообразно составить совместно с учащимися и план решения текстовых задач на экстремум.

Он может быть таким:

1) Выделить, какие величины в данной задаче постоянны, а какие переменны, какая величина исследуется.

2) Из всех переменных выбрать одну независимую переменную и установить область ее значений.

3) Исследуемую величину в данной задаче выразить через выбранную независимую переменную.

4) Найти критические точки полученной функции на области значений переменной.

5) Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка области определения полученной функции.

6) Выбрать из полученных значений наибольшее или наименьшее (смотря по тому, что требует задача) и ответить на вопрос, поставленный в задаче.

Этот план может быть оформлен в виде таблицы, которая вывешивается в классе, а также записан в тетрадях учащихся.

Но следует учесть, что этот план не должен быть навязан учащимся, они должны его принять как облегчающий дело. В частности, нельзя снижать оценку, если учащийся правильно решил задачу, не пользуясь этим планом.

Наибольшую сложность в данном плане представляет третий пункт, согласно которому учащиеся аналитической формулой выражают функциональную зависимость исследуемой величины в данной задаче и выбранной ими независимой переменной. Поэтому полезно заранее подготовить учащихся к выполнению этой части работы. С этой целью учащимся могут быть предложены такие задачи:

1) Выразите формулой зависимость стороны квадрата от его площади.

2) Одна из сторон прямоугольника с заданным параметром P имеет длину x. Выразите формулой зависимость площади $S(x)$ этого прямоугольника от стороны x.

3) Выразите боковую поверхность конуса заданного объема V через: а) радиус его основания; б) высоту конуса.

4) Составьте формулу, выражающую зависимость площади прямоугольника, вписанного в окружность радиуса r, от длины одной из его сторон.

5) Неоднородный стержень AB имеет длину l см. Выразите формулой зависимость массы его части AM от длины отрезка AM, если масса растет пропорционально произведению квадрата расстояния точки M от конца A на расстояние $|MB|$. Ответ. Зависимость будет выражена формулой $m(x) = kx^2(l - x)$, где k — коэффициент пропорциональности.

Решение задач на отыскание выражения, задающего некоторую величину, как функцию другой хорошо сочетается с материалом темы «Числовые функции», с рассмотрением задания функций с помощью аналитической формулы.

В пособии таких задач почти нет (есть задача 274), но можно использовать задачи из «Дополнительных упражнений к главе V» учебника, изменяя задание, а именно требуя лишь составления аналитической формулы, в которой исследуемая величина выражена через выбранную переменную.

Покажем теперь, как с помощью предложенного плана может быть решена такая задача:

З а д а ч а. Корабль находится от точки A берега на расстоянии 3 км. С корабля отправлен гонец с донесением в штаб B, находящийся от точки A на расстоянии 10 км по берегу ($\widehat{BAK} = 90°$). Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а гонец, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы донесение в штаб было доставлено в кратчайшее время?

Пояснения к решению:

1) Постоянными величинами будут $|AK| = 3$ км, $|AB| = 10$ км, $v_{\text{лодки}} = 4$ км/ч, $v_{\text{гонц}} = 5$ км/ч. Переменными величинами будут расстояния $|AM|$, $|KM|$, $|MB|$. Исследуемая величина — время, затраченное на их прохождение.

2) Обозначим через x расстояние AM. Тогда по определению $0 \leqslant x \leqslant 10$.

3) Выразим время, затраченное на путь KMB, через x. Из прямоугольного треугольника AKM, по теореме Пифагора, имеем: $|KM| = \sqrt{x^2 + 9}$. Время, затраченное на путь KMB, будет

$$t(x) = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{4} + \frac{10 - x}{5}.$$

4) Найдем критические точки функции t на $[0; 10]$:

$$t'(x) = \frac{x}{4\sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{5} = \frac{5x + 4\sqrt{9 + x^2}}{20\sqrt{9 + x^2}}.$$

Производная всюду существует, так как знаменатель дроби не обращается в нуль ни при каких значениях x. Следовательно, критическими точками могут быть те, в которых производная равна нулю.

$$\frac{5x - 4\sqrt{9 + x^2}}{20\sqrt{9 + x^2}} = 0; \quad 5x - 4\sqrt{9 + x^2} = 0;$$

$$4\sqrt{9 + x^2} = 5x; \; 16(9 + x^2) = 25x^2;$$

$$x^2 = 16; \; x = 4 \text{ или } x = -4.$$

Точку $x = -4$ проверять не нужно, так как она не принадлежит промежутку $[0; 10]$.

5) Найдем значения функции в точке $x = 4$ и на концах отрезка $x = 0$ и $x = 10$.

$$t(4) = 2\frac{9}{20};\ t(0) = 2\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{121}}{4};\ t(10) = \frac{\sqrt{109}}{4}.$$

6) Так как $t(0) > t(4)$; $t(10) > t(4)$; $t(0) > t(10)$, то наименьшее значение функция t достигает в точке $x = 4$.

Ответ. Донесение будет доставлено в штаб в кратчайший промежуток времени, если лодка пристанет к берегу в месте, отстоящем от точки A на расстоянии, равном 4 км.

А. Я. Блох,
И. А. Павленкова

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПРОИЗВОДНОЙ В IX КЛАССЕ

Формирование умения решать задачи на экстремум с помощью производной — одна из важных целей изучения начал математического анализа в средней школе. Задачи этого типа имеют четкую прикладную направленность — если не по фабуле, то по подходу к решению. Действительно, в них четко представлены все фазы построения и использования математической модели: формализация — составление функции, описывающей условия задачи; решение формализованной задачи — поиск значений аргумента, в которых значение производной функции равно нулю или в которых она не существует (критических точек); интерпретация — анализ критических точек с учетом особенностей задачи.

Вместе с тем следует учитывать, что задачи, которые решаются с использованием производной, во многих случаях оказывается возможным решить и другими, элементарными методами. Сопоставление различных способов решения экстремальных задач, проведенное на нескольких примерах, может оказаться полезным в нескольких отношениях:

— можно сравнить единообразный характер решения задач с помощью производной с приемами, которые приходится выискивать, если производной не пользоваться;

— решение экстремальных задач элементарными методами обычно находится с большим трудом; оно включает элемент догадки и творчества. В то же время использование производной может оказаться принципиально несложным, но связанным с достаточно большими вычислениями.

П р и м е р 1. Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг, найдите прямоугольник наибольшей площади.

Э л е м е н т а р н о е р е ш е н и е. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, вписанный в полуокружность, $[KP]$ — ее диаметр (рис. 1). Объединение данной полуокружности и ее образа при осевой симметрии относительно (KP) — окружность. В эту окружность вписан прямоугольник $AA'B'B$; $[A'B'] = Z_{(KP)}[AB]$ (рис. 2). Площадь прямоугольника $ABCD$ — половина площади прямоугольника $AA'B'B$. Отсюда следует, что (площадь $ABCD$ максимальна) $\Leftrightarrow$ (площадь $AA'B'B$ максимальна). Но из всех прямоугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат, отсюда получаем ответ: искомый прямоугольник имеет отношение сторон 2 : 1, а его площадь равна R^2, где R —радиус данной полуокружности*.

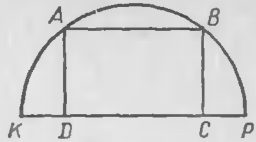


Рис. 1

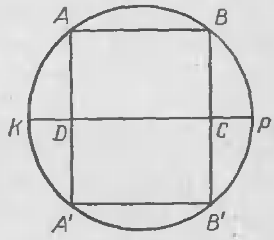


Рис. 2

Решение с помощью производной. Будем считать, что данный полукруг расположен на координатной плоскости (рис. 4). Тогда площадь $ABCD$ выражается функцией $f(x)$, где $x = |OC|$:

$$f(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2};$$
$$D(f) =]0; R[.$$

Производная данной функции имеет вид:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{R^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

откуда значение аргумента для экстремума $f(x)$ (проверяется далее, что оно будет точкой максимума) находится из уравнения $R^2 - 2x^2 = 0$, т. е. $x = \frac{\sqrt{2}R}{2}$ и $f(x) = R^2$.

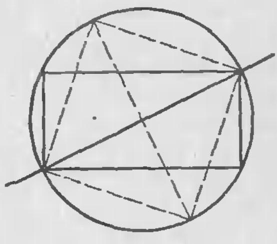


Рис. 3

Заметим, что в данном случае выяснение характера критической точки проще всего произвести с привлечением геометрических соображений: функция $f(x)$ при значениях x, близких к концам интервала $]0; R[$, принимает значения, близкие к нулю (соответствующие прямоугольники «тонкие»); если же x удаляется от концов $]0; R[$, то $f(x)$ возрастает. Но критическая точка у функции только одна; следовательно, это точка максимума. Безусловно, приведенные рассуждения не-

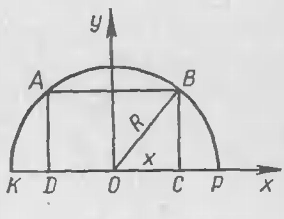


Рис. 4

* Задача о нахождении прямоугольника наибольшей площади, вписанного в круг, может быть легко решена уже в курсе геометрии VII класса. Действительно, диагональ разбивает прямоугольник на два прямоугольных треугольника, гипотенузой которых служит диаметр круга (рис. 3). Высота этих треугольников максимальна в случае, когда она совпадает с радиусом, перпендикулярным диаметру соответствующего полукруга, и в этом случае оба треугольника будут равнобедренными прямоугольными, т. е. прямоугольник будет квадратом.

Нам кажется, что эту задачу стоит решить в курсе геометрии VII класса именно с тем, чтобы вспомнить о ней в курсе алгебры и начал анализа IX класса.

достаточно строги, но, возможно, они полезны в качестве наглядного пояснения результата.

Нахождение критической точки в этом примере можно упростить (см. замечание в конце статьи).

Пример 2. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x + \frac{2}{x}$ при положительных значениях аргумента.

Элементарное решение. В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел

$$5x + \frac{2}{x} \geqslant 2\sqrt{5x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{10}.$$

Равенство достигается при $5x = \frac{2}{x}$, откуда для положительных x $x = \sqrt{0{,}4}$ и наименьшее значение функции равно $2\sqrt{10}$.

Этот пример удобно использовать, чтобы показать преимущество решения с помощью производной. Но одновременно элементарный способ целесообразно изложить с целью активизировать понятия среднего арифметического и среднего геометрического.

Рассмотрим теперь два примера, объединенных общим мотивом — неожиданностью ответа, полученного с помощью применения производной. Эти примеры очень важны для дальнейшего развития геометрической интуиции. Перед учениками следует поставить вопрос, можно ли как-то объяснить эту неожиданность, предвидеть ее — словом, провести работу, цель которой в том, чтобы подобные задачи уже не воспринимались как имеющие неожиданный ответ.

Пример 3. Найдите наибольшую площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину. Высота H конуса равна 1; радиус R основания равен 3.

Беглое знакомство с условием и привычность рассмотрения осевого сечения конуса «навязывает» это сечение в качестве безусловного кандидата на сечение наибольшей площади. Это интуитивное представление может быть подкреплено еще тем, что треугольник, получающийся в сечении, имеет наибольшую длину основания.

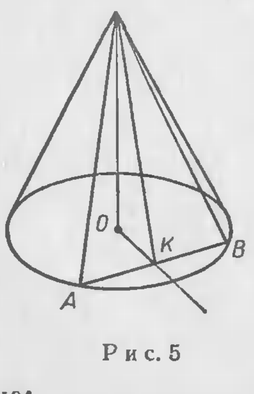


Рис. 5

Решение. Пусть плоскость сечения пересекает круг, лежащий в основании конуса, по отрезку $[AB]$ (рис. 5). Рассмотрим перпендикуляр $[OK]$ к отрезку $[AB]$ и положим $x = |OK|$. Тогда площадь треугольника OAB как функция от x будет выражаться так:

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{9 - x^2};\ D(f) =]0;\ 3[.$$

Производная функции $f(x)$, рассматриваемой на ее естественной области $[-3;\ 3]$, обращается в нуль в точках $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$.

Пользуясь правилом нахождения наибольшего значения функции на отрезке, находим, что на отрезке $[0; 3]$ такое значение $f(x)$ достигается в точке $x = 2$. Получаем, таким образом, ответ: наибольшая площадь сечения равна 5. Заметим, что осевое сечение конуса, которое соответствует значению $x = 0$, имеет площадь 3; это минимум функции $f(x)$ на расширенной области определения.

Объяснить местонахождение максимума площади сечения можно таким способом: площадь треугольника QAB (Q — вершина конуса) зависит от его высоты $[QK]$ и основания $|AB|$. При возрастании x (от 0 до 3) длина основания монотонно уменьшается, но высота треугольника QAB увеличивается, причем эти изменения не «компенсируют» друг друга. Наглядно это можно представить себе на конусе, высота которого очень мала по сравнению с радиусом основания, например $H = 1$ и $R = 10$. Для такого конуса видно, что при увеличении x (начиная с $x = 0$) площадь сечения сначала растет, потому что основание $[AB]$ уменьшается незначительно, а высота $[QK]$ увеличивается быстро: при малых по абсолютной величине значениях x

$$|AB| = \sqrt{100 - x^2} \approx 10\left(1 - \frac{x^2}{20}\right) = 10 - 0{,}5x^2;$$

$$|QK| = \sqrt{1 + x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2};$$

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |QK| \approx 10 + 4{,}5\ x^2 \geqslant 10 = S\ (QAB).$$

П р и м е р 4. Человек, гуляющий в лесу, находится в 5 км от прямолинейной дороги и в 13 км от дома, стоящего у дороги. Скорость его передвижения по лесу 3 км/ч, по дороге — 5 км/ч. Найдите наименьшее время, за которое он сможет прийти домой.

Решение сводится к нахождению места, у которого человек выйдет на дорогу. Кажется естественным, что лучше всего выйти из леса как можно быстрее, т. е. перпендикулярно к дороге, потому что дальше можно продолжать движение с большей скоростью. Но, с другой стороны, если избрать маршрут ACD (рис. 6), то не исключена возможность выиграть время за счет того, что проигрыш во времени на отрезке $[AC]$ (по сравнению с $[AB]$) будет компенсирован выигрышем его на отрезке $[CD]$ (по сравнению с $[BD]$). Поэтому первоначальное предположение уже не должно выглядеть таким самоочевидным.

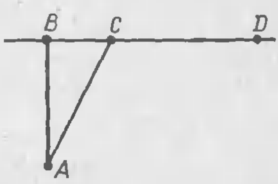


Рис. 6

Р е ш е н и е. В обозначениях рисунка 6 требуется разыскать наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{12 - x}{5} + \frac{\sqrt{25 + x^2}}{3}; \quad x \in R^+.$$

Производная функции $f(x)$ равна

$$f'(x) = -\frac{1}{5} + \frac{x}{3\sqrt{25+x^2}};$$

единственный ее корень равен $\frac{15}{4}$. Следовательно, у $f(x)$ имеется единственная экстремальная точка. В этой точке $f(x)$ достигает своего минимума и наименьшее время, за которое человек может достигнуть дома, равно 3 ч 44 мин.

Нетрудно заметить, что как в примере 3, так и в примере 4 ответ качественно мог бы быть иным (в примере 3 максимум площади сечения мог бы достигаться при осевом сечении, в примере 4 минимум мог бы достигаться при совпадении точки C с точкой D, если бы подбор численных значений параметров был иным. Каждую из этих двух задач можно развернуть в небольшой цикл задач; анализ этого цикла является полезным упражнением для сильных учащихся. Вот как, например, может выглядеть этот цикл.

Задача А (к примеру 3). а) Исходная задача примера 3. б) То же условие, но $H = 4$. в) То же условие, но $H = 3$. г) Найдите наименьшее H, обладающее тем свойством, что в конусе с основанием $R = 3$ и высотой H осевое сечение имеет наибольшую площадь среди сечений, полученных пересечением конуса плоскостью, проходящей через его вершину.

Задача Б (к примеру 4). а) Исходная задача примера 4. б) То же условие, но скорость движения по лесу 1 км/ч. в) То же условие, но скорость движения по лесу 0,8 км/ч. г) Какова должна быть наименьшая скорость движения человека по лесу, чтобы минимум времени, за которое он может прийти домой, достигался при движении по отрезку AD?

В заключение напомним об одном известном приеме для упрощения выкладок при решении задач на нахождение экстремальных значений с помощью производной.

Значительное количество таких задач связаны с вычислениями, в которых используется теорема Пифагора и, как следствие, в результирующих выражениях появляются квадратные корни. Нахождение производных от выражений, содержащих квадратные корни, технически сложнее, чем нахождение производных от многочленов. Чтобы свести вычисление к этому последнему случаю, можно воспользоваться утверждением:

«Пусть $f(x)$ — функция, определенная на множестве D и принимающая неотрицательные значения. Тогда функции $f(x)$ и $f^2(x)$ на множестве D принимают наибольшие значения при одних и тех же значениях аргумента*».

---

* Следует (при таком переходе) обратить внимание на то, что естественная область определения функции $f^2(x)$ может быть больше, чем у $f(x)$. Поэтому, найдя точки экстремума $f^2(x)$, нужно проверить, принадлежат ли они области определения функции $f(x)$.

Если аналитическое выражение функции $f(x)$ содержит квадратный корень в качестве множителя (как в примерах 1 и 3), то, пользуясь этим утверждением, мы можем искать экстремумы функции $f^2(x)$, что гораздо удобнее. Например, можно было бы упростить выкладки в примере 1.

Между прочим, отсюда следует, что при составлении последовательности упражнений, цель которых — сформировать умение решать содержательные задачи на экстремум с помощью производной, в качестве одной из подготовительных задач должна быть задача типа:

«Функция задана аналитическим выражением и областью определения, которая у́же, чем естественная область определения данного аналитического выражения. Найдите ее экстремальные значения».

В заключение рекомендуем вниманию учителя статью Э. Г. Готмана «Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений» (Математика в школе, 1979, № 2), содержащую интересный материал по вопросам, аналогичным рассмотренным в этой статье.

И. А. Лурье

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ОБЪЕМЫ ФИГУР»

«Объемы фигур» — тема, изучение которой вызывает у учащихся X класса достаточно серьезные затруднения. В этой теме есть четыре трудные для усвоения доказательства: 1) теорема об объеме прямоугольного параллелепипеда, 2) теорема об объеме пирамиды, 3) теорема об объеме цилиндра, 4) теорема об объеме фигуры, полученной вращением криволинейной трапеции. Логическая структура доказательства каждой теоремы специфична, используется только при рассмотрении данного раздела и требует от учащихся скорее не понимания, а запоминания. Именно поэтому доказательство первой из перечисленных теорем считается необязательным для изучения и воспроизведения всеми учащимися. Трудности усугубляются тем, что вывод формул для вычисления объема каждого вида многогранников (параллелепипеда, прямой призмы, наклонной призмы, пирамиды), фигур вращения (цилиндра, конуса, шара) проводится всякий раз оригинальным, не использовавшимся ранее методом, что не только вызывает у учащихся значительные трудности при его воспроизведении, но и не дает возможности для усвоения учащимися основной идеи измерений, подменяет единство методов рассуждений «кусочной мозаикой», из которой никаким способом нельзя сложить цельную картину.

На самом же деле тема «Измерение объемов фигур» дает возможность ознакомления учащихся с применением единого математического метода. Более того, появляется хорошая возможность иллюстрации и применения такого математического аппарата, как интегральное исчисление, не только в курсе алгебры и начал анализа, но в других учебных дисциплинах. Надлежащим образом развитая, эта возможность в конце обучения учащихся курсу математики реализуется как иллюстрация единства и широкого применения математических методов в различных областях человеческой деятельности. Действительно, всюду, где процесс измерения может быть описан аддитивной функцией (т. е. такой функцией, которая объединению двух объектов ставит в соответствие сумму значений той же функции, соответствующих объединяемым объектам), для вычисления результата может быть использован интеграл. В дальнейшем мы покажем это на примере вычисления объемов фигур, но это справедливо и для вычисления, например, работы, энергии и т. п.

Предлагаемая нами система изучения темы «Объем фигур» базируется на одном факте: объем любой фигуры, изучаемой в школьном курсе, может быть вычислен по формуле $V = \int\limits_a^b S(x)dx$. При этом мы пользуемся тем понятием объема фигуры, которое формируется учебным пособием «Геометрия 9—10» под редакцией З. А. Скопеца, но уточняем его по аналогии с понятиями длины отрезка и площади плоской фигуры.

Таким образом, предлагаемая нами система изучения данной темы заключается в следующем:

Вначале проводится аналогия между свойствами измерения длин отрезков и площадей плоских фигур.

Затем постулируются свойства объемов фигур (аналогичные сформулированным в учебном пособии «Геометрия 9—10») таким образом, чтобы они были аналогичны свойствам измерения длин отрезков и площадей плоских фигур.

После этого разбирается вопрос о том, каким образом для каждой пространственной фигуры можно задать формулу $\int\limits_a^b S(x)dx$, т. е. как следует проводить выбор системы координат, как задавать подынтегральную функцию, как находить пределы интегрирования.

И наконец, формулируется теорема о том, что объем любой фигуры можно вычислять по данной формуле, т. е. что величина, определяемая по этой формуле, обладает всеми свойствами объемов.

Так как параллельно с рассмотрением теории выводятся формулы для вычисления объемов всех изучаемых в школьном курсе геометрии фигур, то рассмотрение нового материала на этом заканчивается.

Распределение учебного времени, отводимого на изучение этого раздела по предлагаемой схеме, выглядит так:

Обобщение свойств длин отрезков и площадей плоских фигур . . . . 1 ч

Понятие об объеме фигуры . . . . 1 ч

Формула для вычисления объема фигуры. . . . . . 2 ч

Упражнения на нахождение объемов

а) призмы . . . . 5 ч

б) пирамиды . . . . 2 ч

в) цилиндра . . . . 1 ч

г) конуса . . . . 2 ч

д) шара . . . . 2 ч

Площадь сферы . . . . 2 ч
Подготовка к контрольной работе. . . . . 1 ч
Контрольная работа . . . . 1 ч

Заметим, что изучение раздела «Площадь сферы» проводится по схеме учебного пособия.

Как нетрудно видеть, учебное время, отводимое нами на изучение перечисленных вопросов, совпадает с рекомендациями книги для учителя. Однако при нашей схеме изложения материала на изучение теории отводится 4 урока, а остальное время посвящается решению задач. Это дает возможность проведения широкого закрепления геометрического материала, вызывающего обычно достаточные трудности у учащихся X класса. Кроме того, при такой схеме изучения измерений пространственных фигур появляется, как это будет показано ниже, возможность широко использовать изученные в курсе алгебры и начал анализа свойства интеграла, выводить новые его свойства и иллюстрировать применение этого материала на богатом неалгебраическом содержании.

Из всего сказанного следует, что изучение теоретического материала данной темы имеет отношение как к курсу геометрии, так и к курсу алгебры и начал анализа и может быть рассмотрено на уроках по любому из этих предметов. В пользу изучения этого материала на уроках алгебры и начал анализа говорит то, что этот материал просто закрепляет изученное об интеграле.

Ниже мы приводим методическую систему реализации выдвинутых выше положений.

Изучение вопроса об объемах фигур полезно начинать с повторения и обобщения изученных ранее свойств длин отрезков и площадей плоских фигур. При этом учащиеся вспоминают, что при измерении длин каждому отрезку ставится в соответствие величина (длина отрезка), причем это соответствие удовлетворяет следующим условиям:

а) длина любого отрезка неотрицательна;

б) конгруэнтные отрезки имеют равные длины;

в) если отрезок c есть объединение отрезков a и b, причем пересечение отрезков a и b или пусто, или единственная точка, то длина отрезка c есть сумма длин отрезков a и b;

г) в качестве единицы измерения длин отрезков может быть взят любой ненулевой отрезок.

Эти свойства длин отрезков можно повторить при рассмотрении следующей системы упражнений:

1. На рисунке 1 изображен отрезок AB. Найдите длину отрезка AB, считая единицей измерения а) сторону одной клеточки, б) 1 сантиметр (отрезок CD), в) отрезок EF.

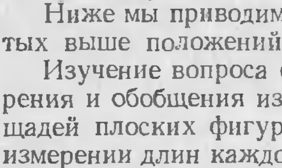


Рис. 1

При решении этой задачи следует акцентировать внимание учащихся на том, что длина одного и того же отрезка может выражаться разными числами в зависимости от выбора единицы измерения. Но если единица измерения уже выбрана, то длина отрезка есть единственное число. При этом длина отрезка всегда неотрицательна.

На том же рисунке 1 изображен отрезок HH, т. е. такой отрезок, у которого начало и конец совпадают. Длина такого отрезка равна нулю независимо от того, что́ является единицей измерения.

2. Дан отрезок AB и точка C на этом отрезке. Найдите длину отрезка AB, если известно, что расстояние точки C от точек A и B равно соответственно 2 см и 4 см.

Решая эту задачу, мы пользуемся таким свойством длин отрезков: если точка C разбивает отрезок AB на два отрезка: AC и CB, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и CB.

3. Отрезки AB и CD конгруэнтны. Длина отрезка AB равна 5 см. Найдите длину отрезка CD.

Разбирая с учащимися эту (а также и следующую) группу упражнений, следует иметь в виду, что ничего ранее неизвестного учащимся эти упражнения не содержат. Они предназначены для повторения тех свойств длин отрезков (и площадей плоских фигур), которые в данный момент необходимо вспомнить с учащимися, чтобы они могли сознательно освоить дальнейшие рассуждения. Еще раз напоминаем, что в процессе разбора этой группы упражнений должны быть сформулированы вышеперечисленные свойства длин отрезков.

Площади плоских фигур обладают аналогичными свойствами.

Каждой плоской фигуре Ф ставится в соответствие величина (площадь этой фигуры), причем это соответствие удовлетворяет следующим условиям:

а) площадь любой фигуры неотрицательна;

б) конгруэнтные фигуры имеют равные площади;

в) если фигура Ф есть объединение фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, пересечение которых — линия, точка или пустое множество, то площадь фигуры Ф равна сумме площадей фигур $Ф_1$ и $Ф_2$ (свойство аддитивности площадей);

г) площадь квадрата, длина стороны которого равна единице измерения длин, есть единица.

Повторить с учащимися эти свойства можно, выполняя следующую систему упражнений:

4. На рисунке 2 изображена плоская фигура $ABCDEF$. Найдите ее площадь, приняв за единицу измерения площадь: а) одной клеточки, б) половины одной клеточки, в) треугольника POQ.

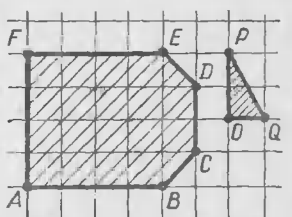


Рис. 2

Следует обратить внимание учащихся на то, что при измерении площадей получаемое число зависит от выбора единицы измерения. Если же единица измерения выбрана, то каждой фигуре ставится в

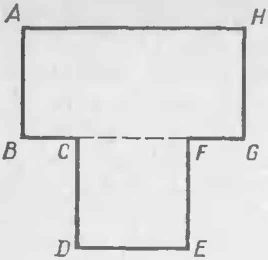


Рис. 3

соответствие единственное число, причем это число неотрицательно. Следует также вспомнить, что площади отрезков и точек можно считать равными нулю.

5. Прямоугольник имеет стороны 5 см и 4 см. Какова площадь прямоугольника? Площадь какой фигуры взята в качестве единицы измерения? Какова площадь единицы измерения?

Решая эту задачу, получаем, что площадь прямоугольника равна 20 см^2. Единица измерения — площадь квадрата со стороной 1 см. Его площадь — 1 см^2.

6. Плоская фигура $ABCDEFGH$ состоит из двух прямоугольников: $ABGH$ и $CDEF$, площади которых соответственно 10 см^2 и 5 см^2. Найдите (рис. 3) площадь фигуры $ABCDEFGH$.

Решая эту задачу, следует вспомнить о свойстве аддитивности для площадей: если плоская фигура разбита на две, общая часть которых есть линия или точка, то площадь всей фигуры равна сумме площадей фигур, ее составляющих.

7. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны. Площадь первого из них равна 36 см^2. Какова площадь второго?

Напоминаем, что цель решения этих упражнений — повторить и сформулировать свойства площадей плоских фигур, которые были перечислены выше.

Итак, рассмотрев свойства длин отрезков и площадей плоских фигур, нетрудно сделать вывод, что они аналогичны, т. е. площади плоских фигур и длины отрезков обладают рядом общих свойств. Так, измерить длину отрезка или площадь плоской фигуры — это значит поставить измеряемому объекту в соответствие число, причем это число неотрицательно. Оно зависит от выбора единицы измерения, но если единица измерения фиксирована, то каждому объекту ставится в соответствие единственное число. Указанное соответствие обладает свойством аддитивности. Конгруэнтным объектам ставятся в соответствие равные числа.

Для закрепления рассмотренных свойств длин отрезков и площадей плоских фигур можно предложить учащимся следующие упражнения.

8. Докажите, что два треугольника, на которые диагональ делит параллелограмм, имеют равные площади.

9. Основание прямоугольника в два раза больше его высоты. Покажите на рисунке: а) как нужно разрезать этот прямоугольник на две части, чтобы из них можно было составить прямоугольный треугольник; б) как разрезать его на две части, чтобы из них можно было составить равнобедренный треугольник; в) как разрезать его на три части, чтобы из них можно было составить квадрат. Как связаны между собой площадь прямоугольника и площади составляемых из него фигур?

Выполнение этого упражнения иллюстрирует рисунок 4. Площади фигур равны, так как фигуры равносоставлены, т. е. составлены из соответственно конгруэнтных частей. При доказательстве следует апеллировать к аддитивности площадей и равенству площадей конгруэнтных фигур.

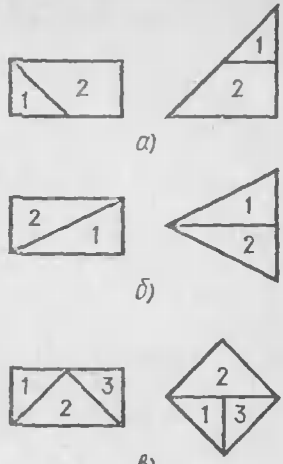


Рис. 4

10. Постройте два прямоугольника: один с основанием 6 см и высотой 2 см, другой с основанием 3 см и высотой 4 см. Покажите на чертеже, как разрезать первый прямоугольник на возможно меньшее число частей, из которых можно составить второй прямоугольник.

Иллюстрацией решения этой задачи является рисунок 5.

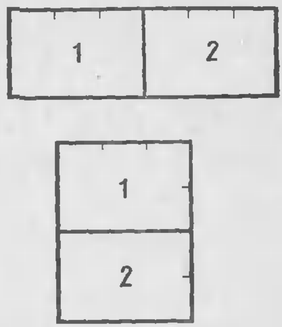


Рис. 5

11. Запишите основные свойства длин отрезков и площадей плоских фигур, сгруппировав попарно аналогичные свойства.

12. Как изменится числовое значение величины, если единицу ее измерения уменьшили в 10 раз? Увеличили в 100 раз?

13. Три различные точки K, L и M лежат на одной прямой. $|KL| = 6$ см, $|LM| = 10$ см. Какой может быть длина $|KM|$? Для каждого из возможных случаев сделайте соответствующий рисунок.

Решение этой задачи иллюстрирует рисунок 6.

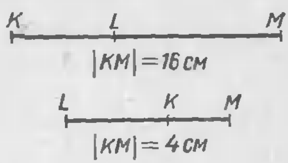


Рис. 6

Теперь мы переходим к одной из важнейших задач нашей темы. Нам надо дать определение объема фигуры, указать его свойства и наметить путь нахождения объемов.

Начнем с определения.

Измерение объемов пространственных фигур удовлетворяет свойствам, аналогичным свойствам измерения длин отрезков и площадей плоских фигур. Поэтому процессы измерения всех известных нам из курса средней школы геометрических фигур могут проводиться единым методом. Таким методом является вычисление с помощью интеграла. Если ученик в курсе алгебры и начал анализа усвоил, что площадь плоской фигуры можно найти с помощью интеграла и, кроме того, он видит, что объемы и площади обладают общими свойствами, то у него немедленно возникнет идея о нахождении объемов с помощью интеграла. Такая аналогия естественна.

Определение объема фигуры мы сформулируем следующим образом:

«Каждой из измеряемых фигур ставится в соответствие величина — объем фигуры, причем это соответствие удовлетворяет следующим условиям:

а) объем любой фигуры неотрицателен;

б) конгруэнтные фигуры имеют равные объемы;

в) если фигура Ф есть объединение фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, пересечение которых содержит только точки поверхностей фигур или пусто, то объем фигуры Ф равен сумме объемов фигур $Ф_1$ и $Ф_2$;

г) объем куба, длина ребра которого равна единице измерения длин отрезков, равен 1».

Объем фигуры Ф обозначается символом V (Ф).

Закрепление свойств объемов фигур можно провести, выполняя следующие упражнения, часть которых является устными. Ответы и указания к решению приводятся в квадратных скобках.

14. Прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, объем которого 18 см^3, разделен сечением $KLMN$ на две конгруэнтные части. Найдите объем каждой части.

15. Из кубов, длина ребра каждого из которых равна 1 см, составлена фигура, изображенная на рисунке 7. Найдите ее объем.

16. Прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ разделен плоскостью ACC_1A_1 на две треугольные призмы. Объем одной из них 8 см^3. Найдите объем параллелепипеда.

[Призмы $ABCA_1B_1C_1$ и $ACDA_1B_1D_1$ конгруэнтны. Поэтому их объемы равны. Объем параллелепипеда равен сумме объемов составляющих его призм. Следовательно, объем параллелепипеда равен 16 см^3.]

17. Докажите, что если фигура A содержится в фигуре B, то $V(A) \leqslant V(B)$.

[Так как A содержится в B, то существует множество точек B, каждая из которых не принадлежит A (если A и B совпадают, то это множество пусто). Это множество точек образует фигуру C При этом $V(B) = V(A) + V(C)$. Но так как $V(C) \geqslant 0$, то $V(B) \geqslant V(A)$.]

18. В шар вписана призма. Объем какой из фигур (шара или призмы) больше и почему?

19. № 111 (1) из учебного пособия. [Если $Ф_1$ вложено в $Ф_2$.]

20. Строительный кирпич имеет объем 1800 см^3. Найдите объем стены, выложенной из 10 000 таких кирпичей. Учтите, что раствор увеличивает строительный объем на 15%.

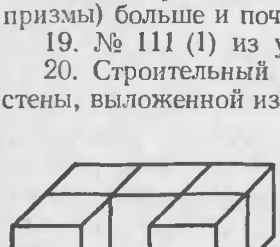


Рис. 7

Эта задача аналогична № 112 из учебного пособия.

21. № 115 из учебного пособия.

[Куб можно разбить на 6 конгруэнтных пирамид, основанием каждой из которых является грань куба, а вершиной — центр куба. Суммой объемов этих пирамид является объем куба. Поэтому объем каждой пирамиды равен $\frac{1}{6}V$.]

22. № 111 (2) из учебного пособия.

Предлагая это задание учащимся, следует помнить, что оно повышенной трудности.

[$\Phi_1 \cup \Phi_2$ можно представить в виде объединения трех фигур A, B и C, у которых нет общих точек. A — это пересечение Φ_1 и Φ_2; B — фигура, состоящая из тех точек Φ_1, которые не принадлежат Φ_2; C — фигура, состоящая из тех точек Φ_2, которые не принадлежат Φ_1.

$V(A) = V(\Phi_1 \cap \Phi_2) = 0{,}5V_2$;

$V(B) = V(\Phi_1) - V(A) = V_1 - 0{,}5V_2$; $V(C) = V(\Phi_2) - V(A) = V_2 - 0{,}5V_2 = 0{,}5V_2$;

$V(\Phi_1 \cup \Phi_2) = V(A) + V(B) + V(C) = V_1 + 0{,}5V_2$.]

23. № 114 из учебного пособия.

24. № 123 (1) из учебного пособия.

Теперь, отработав определение объема фигуры, можно приступить к выведению формулы для вычисления объемов. Прежде чем это сделать, вспоминаем с учащимися способ вычисления площадей плоских фигур с помощью интеграла: $S = \int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ — функция, задающая для каждого x_0 величину сечения фигуры, т. е. длину отрезка прямой $x = x_0$, принадлежащего фигуре, площадь которой подлежит вычислению. Константы a и b задают граничные значения аргумента x.

Аналогичным способом получают формулу для вычисления объема.

Пусть дана пространственная фигура Φ. Выберем плоскость α_0 таким образом, чтобы она не пересекала фигуру Φ (рис. 8).

Выберем ось абсцисс Ox следующим образом: она должна быть перпендикулярна плоскости α_0; положительное направление ее находится в том полупространстве, в котором расположена фигура Φ; начало координат — точка пересечения прямой Ox с плоскостью α_0.

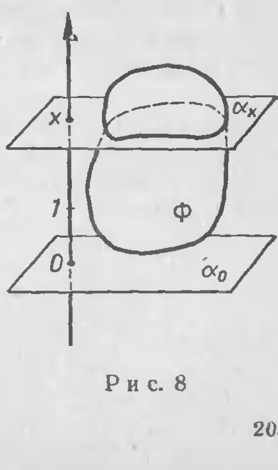


Рис. 8

Через точку с координатой x на этой прямой проводим плоскость α_x, параллельную плоскости α_0. Таким образом устанавливается соответствие между множеством действительных чисел (координатами на оси Ox) и множеством плоскостей, параллельных α_0.

Среди плоскостей данного множества есть такие, которые пересекают фигуру Φ. Первая из этих плоскостей имеет координату a, последняя — координату b ($a \leqslant b$).

Фигура Ф расположена в полосе между плоскостями α_a и α_b. Будем говорить, что фигура Ф задана на отрезке $[a; b]$.

Заметим, что фигура Ф не обязательно задана на отрезке. Она может быть задана на интервале, на дискретном множестве и т. д. Но в курсе геометрии средней школы рассматриваются такие фигуры, которые всегда можно задать на отрезке. Следующая группа упражнений предназначена для иллюстрации этого факта. Задачей этой группы упражнений является выделение отрезков, на которых могут быть заданы основные геометрические фигуры.

25. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна 3. В качестве плоскости α_0 выбрана плоскость $ABCD$, а в качестве оси Ox — прямая AA_1. Найдите значение a и b и укажите плоскости α_a и α_b.

[$a = 0$, $b = 3$, α_0 — плоскость $ABCD$, α_3 — плоскость $A_1B_1C_1D_1$.]

26. Дана пирамида $ABCD$. В качестве плоскости α_0 выбрана плоскость BCD, а в качестве оси Ox — высота AM пирамиды. Найдите значения a и b и укажите плоскости α_a и α_b, если $|AM| = 6$ см.

[$a = 0$, $b = 6$, α_0 — плоскость BCD, α_6 — плоскость APO, параллельная BCD и проходящая через A.]

27. Дан шар радиуса 8 см с центром в точке K. В качестве плоскости α_0 выбрана плоскость на расстоянии 10 см от центра шара. Задайте ось Ox, найдите значения a и b и укажите плоскости α_a и α_b.

[$a = 2$, $b = 18$, (Ox) — прямая, перпендикулярная α_0 и проходящая через K. α_2 и α_{18} — плоскости, касательные к шару и перпендикулярные Ox.]

Таким образом, мы рассмотрели вопрос о выборе пределов интегрирования в формуле для вычисления объемов (хотя пока что и не говорим учащимся об этом в явном виде). Теперь необходимо рассмотреть способ построения подынтегральной функции.

Пусть плоскость α_x, где $a \leqslant x \leqslant b$, пересекает фигуру Ф по плоской фигуре $C(x)$. Площадь этой фигуры обозначим через $S(x)$. Таким образом, построена функция $S(x)$, которая каждому значению x на отрезке $[a; b]$ ставит в соответствие величину $S(x)$. Так как $S(x)$ — площадь плоской фигуры, то она неотрицательна. (Заметим, что если сечением является пустое множество или линия, то $S(x) = 0$.)

Нетрудно понять, что функция $S(x)$ в общем случае не обязательно непрерывна. Но в курсе геометрии средней школы рассматриваются только такие фигуры, для которых $S(x)$ непрерывна.

Следующая система упражнений позволяет показать учащимся построение функции $S(x)$ для конкретных геометрических фигур.

28. Укажите функцию $S(x)$ для случая, описанного в задаче 25.

[$S(x) = 9$.]

29. Найдите значения a, b и постройте функцию $S(x)$ для призмы, если в качестве плоскости α_0 выбрано основание призмы (площадь которого 6 см^2) и высота призмы 7 см.

[$a = 0$, $b = 7$. $S(x) = 6$, так как все сечения призмы плоскостями, параллельными основанию, конгруэнтны, т. е. имеют равные площади.]

30. Найдите значения a и b и функцию $S(x)$ для шара радиуса 8 см, если плоскость α_0 проходит через центр шара.

[$a = -8$, $b = 8$. $S(x) = \pi(8 - x)^2$.]

31. Постройте функцию $S(x)$ для конуса высоты H и радиуса основания R, если в качестве плоскости α_0 выбрана плоскость, параллельная основанию конуса и проходящая через его вершину.

$\left[\frac{x}{H} = \frac{r}{R}\right.$, где r — радиус сечения конуса плоскостью α_x. $r = \frac{xR}{H}$. $\left.S(x) = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot x^2.\right]$

Рассмотрение этой группы упражнений позволяет подвести учащихся непосредственно к интегральной формуле для вычисления объемов фигур.

Можно сказать, что по аналогии со способом вычисления площадей плоских фигур хотелось бы вычислять объемы фигур с помощью интеграла. Формулируется следующее утверждение:

Теорема. Объем фигуры Φ равен интегралу от a до b функции $S(x)$, т. е. $V(\Phi) = \int\limits_a^b S(x)\,dx$.

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что величины, вычисленные по этой формуле, удовлетворяют всем свойствам объемов: а) для любой фигуры величина, вычисленная по данной формуле, неотрицательна; б) конгруэнтным фигурам данная формула приписывает одинаковые величины; в) если фигура Φ есть объединение фигур Φ_1 и Φ_2, пересечение которых имеет общие точки только на поверхности фигур, то $V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2)$; г) величина, вычисленная по данной формуле для единичного куба, равна 1. Кроме того, необходимо доказать, что результат вычисления объема данной фигуры по указанной формуле не зависит от выбора системы координат. Этот факт в школьном курсе доказать невозможно, и придется его сообщить без доказательства. Тогда с использованием его остальные свойства объема могут быть доказаны без особого труда. Приведем для учителя эти доказательства, заметив, однако, что мы не считаем обязательным знакомить с ними всех учащихся.

а) $S(x)$ — функция неотрицательная (смотри свойства площадей плоских фигур). Поэтому ее первообразная $y = F(x)$, где $F'(x) = S(x)$, является неубывающей функцией (действительно, так как $F'(x) \geqslant 0$, то $F(x)$ не убывает). Поэтому

$$\int\limits_a^b S(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Так как $a \leqslant b$ и $F(x)$ — неубывающая функция, то $F(b) - F(a) \geqslant 0$, и следовательно, $\int\limits_a^b S(x)\,dx \geqslant 0$.

б) Надо доказать, что конгруэнтным фигурам Φ_1 и Φ_2 соответствуют равные величины.

Зададим систему плоскостей α_x, позволяющих построить интегральную формулу для фигуры Φ_1. Так как Φ_1 и Φ_2 конгруэнтны, то существует отображение (перемещение), отображающее Φ_1 на Φ_2. При таком отображении система построенных плоскостей отразится на систему плоскостей, которые зададут интегральную формулу для Φ_2. Соответствующие при перемещении друг другу элементы конгруэнтны. Поэтому пределы интегрирования в обоих случаях (для фигуры Φ_1 и для фигуры Φ_2) совпадают, а подынтегральные функции равны. Следовательно, интегральные формулы для вычисления объемов обеих фигур совпадают и дают один и тот же результат вычисления.

в) Надо доказать, что если фигура Φ есть объединение фигур Φ_1 и Φ_2, общие точки которых принадлежат только границам этих фигур, то объем фигуры Φ, вычисленный по интегральной формуле, равен сумме объемов Φ_1 и Φ_2, вычисленных по той же формуле.

Каждая плоскость α_x пересекает фигуру Φ по плоской фигуре $C(x)$. При этом она пересекает фигуру Φ_1 по плоской фигуре $C_1(x)$, а фигуру Φ_2 по плоской фигуре $C_2(x)$.

Заметим, что $C_1(x)$ и $C_2(x)$ могут оказаться и пустыми множествами.

Объединение $C_1(x)$ и $C_2(x)$ есть $C(x)$, а их пересечение не содержит внутренних точек этих фигур, так как не содержит внутренних точек пересечение фигур Φ_1 и Φ_2. Отсюда следует, что если $S_1(x)$ — площадь плоской фигуры $C_1(x)$, $S_2(x)$ — площадь $C_2(x)$, а $S(x)$ — площадь $C(x)$, то в силу свойств площадей плоских фигур

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x).$$

Интегральные формулы для рассматриваемых фигур имеют вид:

$$V(\Phi) = \int_a^b S(x)\,dx;$$

$$V(\Phi_1) = \int_a^b S_1(x)\,dx;$$

$$V(\Phi_2) = \int_a^b S_2(x)dx.$$

Надо доказать, что $V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2)$, т. е.

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b S_1(x)\,dx + \int_a^b S_2(x)\,dx.$$

Нам известно, что функции $S_1(x)$, $S_2(x)$ и $S(x)$ имеют первообразные, т. е. существуют функции $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F(x)$ такие, что $F_1'(x) = S_1(x)$; $F_2'(x) = S_2(x)$; $F'(x) = S(x)$.

Из всего сказанного следует, что

$$F'(x) = S(x) = S_1(x) + S_2(x) = F_1'(x) + F_2'(x) = \\ = (F_1(x) + F_2(x))'.$$

Отсюда

$$\int_a^b S(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = (F_1(x) + F_2(x))\Big|_a^b = F_1(b) + F_2(b) - \\ - F_2(a) - F_1(a) = (F_1(b) - F_1(a)) + (F_2(b) - F_2(a)) = \\ = \int_a^b S_1(x)\,dx + \int_a^b S_2(x)\,dx.$$

И окончательно

$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2).$$

г) Надо доказать, что объем куба, длина ребра которого равна единице, есть 1.

Расположим куб относительно системы координат так, как это показано на рисунке 9. В качестве координатной оси возьмем ось абсцисс, а в качестве секущих плоскостей — плоскости, параллельные плоскости yOz на отрезке $[0, 1]$. При этом каждое сечение куба плоскостью α_x есть единичный квадрат. Его площадь равна 1 (согласно свойствам площадей плоских фигур). Поэтому интегральная формула для куба дает

$$\int_0^1 S(x)\,dx = \int_0^1 1 \cdot dx = 1.$$

Таким образом, мы доказали, что вычисление объемов по интегральной формуле возможно, так как при этом выполняются все свойства объемов.

Система упражнений, которую мы приводим ниже, завершает изучение теоретического материала данного раздела. С ее помощью можно вывести интегральные формулы для вычисления объемов фигур и, посчитав интегралы, получить окончательно формулы для вычисления объемов всех геометрических фигур, рассматриваемых в курсе геометрии старших классов.

32. Запишите интегральные формулы для вычисления объемов фигур, заданных в упражнениях 28—31.

33. Запишите формулу для вычисления объема цилиндра высоты H и радиуса основания R, если в качестве плоскости α_0 выбрана плоскость основания цилиндра.

34. Запишите формулу для вычисления

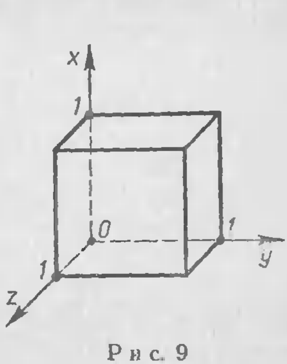


Рис. 9

объема прямоугольного параллелепипеда с измерениями m, n и p (плоскость α_0 задайте сами).

35. Выведите формулу для вычисления объема призмы высоты H и площади основания S.

$$[a = 0, \quad b = H; \quad V_{\text{призмы}} = \int_0^H S \cdot dx.]$$

36. Выведите формулу для вычисления объема пирамиды высоты H и площади основания O.

[Эта задача решается аналогично № 31. Выберем в качестве α_0 плоскость, параллельную основанию пирамиды и проходящую через ее вершину. Тогда $a = 0$, $b = H$. По теореме о параллельных сечениях пирамиды $\frac{S(x)}{Q} = \frac{x^2}{H^2}$. Поэтому $S(x) = \frac{Q}{H^2} x^2$.

Следовательно, $V_{\text{пирамиды}} = \int_0^H \frac{Q}{H^2} x^2 dx.$]

После этого нетрудно, вычислив интегралы, получить формулы для вычисления объемов основных изучаемых в курсе фигур. Так

а) объем призмы высоты H и площади основания S равен

$$V_{\text{призмы}} = \int_0^H S\, dx = S \cdot H;$$

б) объем пирамиды высоты H и площади основания Q равен

$$V_{\text{пирамиды}} = \int_0^H \frac{Q}{H^2} x^2 dx = \frac{1}{3} Q \cdot H;$$

в) объем цилиндра высоты H и радиуса основания R равен

$$V_{\text{цилиндра}} = \int_0^H \pi R^2\, dx = \pi R^2 H;$$

г) объем конуса высоты H и радиуса основания R равен

$$V_{\text{конуса}} = \int_0^H \frac{\pi R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{1}{3} \pi R^2 H;$$

д) объем шара радиуса R равен

$$V_{\text{шара}} = \int_{-R}^{R} \pi (R^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

На этом изучение теоретического материала заканчивается. Остальное время отводится на решение упражнений.

Ю. Б. Великанов,
Е. Г. Глаголева

РАЗВИТИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЛИНИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В X КЛАССЕ

Одной из важных задач курса математики старших классов является развитие и в некотором смысле завершение всех основных линий, составляющих основу школьного математического образования, в том числе систематизация и углубление знаний о функции. В этом аспекте и следует рассматривать изучение показательной функции в X классе.

Изучение показательной функции, равно как и логарифмической, предоставляет большие возможности обогатить знания учащихся о функциях вообще, о способах их задания, о связи способа задания функции с ее свойствами. На примере показательной функции можно развить представления о функциях как о модели процессов и закономерных связей явлений. Немаловажным является то, что вторичное изучение показательной функции происходит тогда, когда учащиеся владеют значительно большим аппаратом исследования функций, чем при первом знакомстве. Это дает возможность развивать формально-оперативные навыки. Возраст и развитие учащихся создают благоприятные условия для работы над повышением логической грамотности: в VIII классе основное внимание уделялось усвоению фактов — от старшеклассников можно требовать более строгих обоснований.

Рассмотрению различных путей реализации этих возможностей при изучении курса алгебры и начал анализа и посвящена эта статья.

Повторение сведений о показательной и логарифмической функциях

Одной из причин трудностей в усвоении свойств показательной (а также и логарифмической) функции является большой перерыв между первичным изучением этой функции в VIII классе и вторичным обращением к этим вопросам в курсе X класса. Этот перерыв во многом создается искусственно: в то время как другие функции (квадратичная, линейная и т. п.) постоянно появляются в примерах и упражнениях, о показательной, равно как и о логарифмической, долгое время или совсем не говорится, или говорится настолько редко и мало, что учащиеся успевают основательно забыть все, что они знали об этих функциях.

Между тем в курсе алгебры и начал анализа есть возможности, использование которых позволяет обеспечить регулярное повторение сведений о показательной и логарифмической функциях и эффективную пропедевтику вторичного изучения этих вопросов.

О показательной функции следует вспомнить прежде всего при изучении действительных чисел. При правильной расстановке акцентов это не приведет к усложнению изложения, а, напротив, поможет снять некоторые трудности. В самом деле, для понимания вопроса о действительных числах важным является разъяснение цели их введения, рассмотрение примеров задач, приводящих к необходимости введения чисел, записывающихся бесконечными десятичными дробями. Среди таких традиционных задач, как получение последовательности десятичных приближений (и, следовательно, бесконечной десятичной дроби) для $\sqrt{2}$, т. е. для $2^{\frac{1}{2}}$, или для $\sqrt[3]{5^8}$, т. е. для $5^{\frac{8}{3}}$, которые уже сами по себе служат напоминанием о показательной функции, естественным будет и пример отыскания приближений для $\log_2 5$. Показ того, что такие на первый взгляд различные задачи решаются по одному и тому же принципу, несомненно, способствует доступности изложения. Если здесь же рассказать (разумеется, без строгих выкладок и доказательств), как можно получить последовательные приближения для $3^{\sqrt{2}}$ или для 2^{π}, то это снимет или значительно ослабит трудности введения определения степени с иррациональным показателем.

Следующий вопрос курса — понятие числовой функции — также дает возможность усилить преемственность в изучении показательной и логарифмической функций. Для этого эти функции должны фигурировать и среди примеров числовых функций, и среди различного рода упражнений. При этом показательная и логарифмическая функции не являются, как и все другие функции, предметом специального изучения, а служат для иллюстрации, для конкретизации того, что говорится в этом месте курса о функциях вообще. Например, разбирая понятие области определения функции, можно обратить внимание учащихся на то, что для того, чтобы можно было считать показательную функцию определенной на всей числовой прямой, нужно ввести понятие степени с иррациональным показателем. Аналогично полезно подчеркнуть, что, например, функцию $f(x) = 3x + 5$ можно считать определенной для любого действительного числа только тогда, когда, изучив действия с действительными числами, мы сможем утверждать, что всякие два действительные числа можно сложить и перемножить.

В результате выполнения упражнений и разбора примеров учащиеся должны в этом месте курса возобновить в памяти основные сведения о показательной и логарифмической функциях (равно как и о других функциях, изученных в восьмилетней школе): определения этих функций, области их определения и множество значений, вид графиков и т. п. Например, определение логарифма и свойства логарифмической функции можно вспомнить при выполнении таких упражнений: 1. Функция f ставит числу x в соответствие показатель степени, в которую нужно возвести число 2, чтобы получить x. Найдите $f\,(4)$; $f\,(8)$; $f\,(0{,}25)$. Задайте $f\,(x)$ формулой. 2. $f\,(x) = \log_3 (x)$. Решите неравенство $f\,(x) > f\,(5)$.

Повторить сведения, полученные в восьмилетней школе об обратных функциях, о четности и нечетности, и подготовить учащихся к дальнейшему изучению этих понятий помогут упражнения на применение символики, например такие:

1. $f\,(x) = 10^x$, $g\,(x) = \lg x$. Найдите $f\,(g\,(100))$; $g\,(f\,(2))$; $g\,(f\,(5))$; $f\,(g\,(a))$.

2. Верно ли равенство $f\,(x) = f\,(-x)$, если: а) $f\,(x) = x$; б) $f\,(x) = x^2$; в) $f\,(x) = 2^x$ и т. д.?

При изучении следующего вопроса программы — возрастание и убывание функции — логарифмическая и показательная функции должны опять-таки фигурировать среди примеров и упражнений наряду с другими функциями. Для выполнения таких упражнений учащимся необходимо твердое знание вида графиков всех основных функций, так как решать вопрос о характере монотонности функции в этом месте курса учащиеся должны, опираясь на график. Однако, чтобы подготовить учащихся к восприятию следующего раздела — о производной,— необходимо разъяснить, что доказывать возрастание или убывание ссылкой на график нельзя. До изучения производной учащиеся могут доказать монотонность какой-либо функции, только опираясь на определение. Полезно продемонстрировать учащимся этот метод на одном-двух примерах, чтобы разъяснить определение, а также для того, чтобы учащиеся могли в дальнейшем оценить преимущества применения производной.

При изучении вопроса о монотонности необходимы упражнения, позволяющие развить умение, полученное учащимися в VIII классе, на примерах показательной и логарифмической функций: умение решать уравнения и неравенства с использованием монотонности функции. Среди таких упражнений (см., например, упражнения 2—5 в конце статьи) могут быть упражнения о конкретных функциях (решить неравенство $2^x > 8$ или неравенство $\log_{0,2} < 5$ и т. п.), а также и более общие вопросы, например: «Пусть $f\,(x)$ — возрастающая функция, $D\,(f) = \boldsymbol{R}$. Решите неравенство $f\,(x) > f\,(3)$». Такие общие упражнения помогут учащимся выделить сущность приема, с которым они познакомились в VIII классе, и осуществить его перенос с частных случаев на всю совокупность функций. Иначе учащиеся могут неправомерно связать этот метод решения уравнений и неравенств только с показательными и логарифмическими функциями.

О показательной и логарифмической функциях можно вспомнить далее, когда речь пойдет о непрерывности и пределе функции и о связи этих понятий. Среди примеров непрерывных функций можно привести и a^x, и $\log_a x$, сообщив учащимся (разумеется, без доказательств), что эти функции непрерывны в каждой точке, где они определены. Разъяснив геометрический смысл этих фактов, учитель опять напомнит учащимся графики этих функций; записав равенства $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$ и предложив одно-два упражнения типа «Найти $\lim\limits_{x \to 0,5} 9^x$» или «Найти $\lim\limits_{x \to 25} \log_5 x$», напомнит определения степени и логарифма.

Можно напомнить показательную и логарифмическую функции и их свойства и при работе над алгоритмом вычисления производной по определению записать, как выглядит формула $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ для этих функций, и даже проделать некоторые тождественные преобразования:

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x};$$

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \log\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

Об основном свойстве показательной функции интересно вспомнить при изучении формул суммы и разности синусов и косинусов. Действительно, задача, поставленная для тригонометрических функций,— как выразить значение $f(x_1 + x_2)$ через значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$, красиво решается для показательной функции:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$$

(и просто для $f(x) = kx : f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$), и только для нее!

В курсе X класса следует повторить показательную и логарифмическую функции в связи с вопросом об обратных функциях. Пара функций a^x и $\log_a x$ обязательно должна фигурировать среди примеров, равно как и пары $f(x) = 2x$ и $g(x) = \frac{x}{2}$, $f(x) = x + 2$ и $g(x) = x - 2$, $f(x) = x^2$ и $g(x) = \sqrt{x}$ и т. п. Полезно сопоставить определения логарифма, разности и корня:

— логарифм числа x по основанию a есть показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить x;

— корень n-й степени из x есть число, которое при возведении в n-ю степень дает x;

— разность числа x и числа a есть такое число, которое при сложении с a дает x. И т. д.

Символические записи этих определений:

$$a^{\log_a x} = x; \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x; \quad (x - a) + a = x \text{ и т. п.}$$

в общем виде записываются в виде равенства $f(g(x)) = x$, выражающего характеристическое свойство взаимно обратных функций: f и g.

Приведенные выше примеры и упражнения показывают, что содержание курса алгебры и начал анализа предоставляет учителю большие возможности сделать так, чтобы учащиеся не забыли то, что они узнали о показательной и логарифмической функции в курсе восьмилетней школы, а в ряде случаев и использовать эти сведения для развития общего понятия функции. Если учитель реализует эти возможности хотя бы частично, то в X классе при переходе к непосредственному изучению показательной функции ему не придется начинать, что называется, «на пустом месте» и он сможет добиться от учащихся более прочного и глубокого усвоения материала.

Определение показательной функции

Когда показательная функция изучается в VIII классе, ее введение связывается с определением степени с дробным показателем, целесообразность которого обосновывается сохранением правила умножения степеней:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}.$$

Однако возраст и развитие учащихся не дает им возможности достаточно четко осознать, что это правило выражает определяющее свойство показательной функции. В результате они запоминают только, что показательной называется функция, задаваемая формулой $f(x) = a^x$. При этом за обозначением a^x для учащихся скрываются четыре (а с введением степени с иррациональным показателем — пять) разных определения: для натурального, нулевого, отрицательного и дробного показателей степени. Что общего в этих определениях, почему эти разные определения дают единую картину изменения функции — от учащихся, как правило, ускользает, так как самостоятельно усмотреть связь этих определений со свойствами показательной функции большинство учащихся, конечно, не может. Не получают они и разъяснений о связи свойств показательной функции с характеристиками описываемых ею явлений. Получается некоторая «мистика»: разные определения объединяются общим обозначением и, «оказывается», что получившаяся функция описывает самые разнообразные процессы. Разъяснить эти факты и должно повторное рассмотрение вопроса об определении показательной функции в X классе, когда учащиеся могут правильно и сознательно его воспринять.

Далее рассматриваются два варианта работы над определением показательной функции на первых уроках по этой теме в X классе. Следует иметь в виду, что многие детали в нашем изложении адресованы учителю с тем, чтобы ему легче было отобрать для уроков тот материал, который может более всего заинтересовать учащихся, и в то же время не перегрузить изложение.

В первом варианте изложения внимание учащихся обращается на то, что функция может быть задана перечислением характеристических свойств. Такой подход является для учащихся совершенно новым, так как до сих пор все основные функции задавались «оперативно»: указывались операции, которые нужно было произвести над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции. Например, квадратичная — это функция, задаваемая формулой $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, которая и указывает последовательность операций; чтобы найти по значению x значение синуса, нужно построить образ точки (1; 0) при повороте R_0^x и найти абсциссу этого образа, и т. п. Таким образом, учащихся всегда ведут одним путем: от правила вычисления значений функции по заданному значению аргумента к свойствам этой функции. При изучении показательной функции представляется возможность показать и обратную связь: свойства функции могут определять способ вычисления ее значений.

Чтобы облегчить учащимся восприятие этой идеи, полезно заранее их готовить к этому. Очень полезны в этом отношении упражнения на придумывание функций, которые можно предлагать учащимся во многих местах курса (например, при введении понятия числовой функции, при рассмотрении вопроса о непрерывности и т. д.). Вот примеры таких упражнений:

1. Нарисуйте график какой-либо функции, обладающей следующими свойствами:

а) определенной на множестве всех действительных чисел и убывающей;

б) возрастающей на R^-, убывающей на R^+ и непрерывной на R. Есть ли у этой функции экстремум?

в) непрерывной, положительной и убывающей на R и такой, что $f(0) = 1$;

г) непрерывной, возрастающей на R, положительной на $]0; 2[$. Может ли эта функция быть отрицательной на $]2; \infty[$? на $]-\infty; 2[$? положительной на $]-\infty; 2[$?

д) непрерывной на $]-1; 1[$, положительной на $]-1; 0[$, отрицательной на $]0; 1[$. Чему равно значение этой функции в точке O?

Конечно, выполняя эти упражнения, учащиеся увидят, что свойства функции не всегда определяют ее однозначно: можно иногда привести довольно разнообразные примеры функций, обладающих указанными свойствами. Но указание свойств, как видно из упражнений, довольно сильно ограничивает это разнообразие, что подчеркивается вопросами к упражнениям, а в ряде случаев значение функции может определяться даже однозначно.

Если учащиеся привыкнут к таким упражнениям, то самым естественным началом изучения показательной функции в X классе представляется такое, при котором учащиеся, выполняя знакомые упражнения, сами узнают эту функцию по ее свойствам. В этом случае учитель может вести изложение примерно так: «Мы приступаем к изучению очень важной функции, которая называется экспоненциальной и обозначается $\exp_a(x)$. Это обозначение читается: «экспонента с основанием a от икс». С этой функцией вы уже встречались, только она называлась и обозначалась по-другому. Мы сейчас рассмотрим свойства функции $\exp_a(x)$ и, исходя из них, попробуем найти правило вычисления значения этой функции по заданному значению аргумента — тогда вы и догадаетесь, о какой функции идет речь. Итак, сформулируем определение:

Экспонентой с основанием a называется функция, определенная на R и обладающая следующими свойствами:

1. $\exp_a(1) = a$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.
2. $\exp_a(x)$ возрастает при $a > 1$ и убывает, если $a < 1$.
3. $\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2)$».

Далее предлагается привести пример (нарисовать график) функции, обладающей свойствами 1 и 2, например, выполнив следующее упражнение:

1) Построить график функции, область определения которой — все действительные числа, $f(1) = 3$ и которая монотонно возрастает.

Таких графиков учащиеся, конечно, нарисуют много. Это подчеркнет, что определяющим, главным для показательной функции является следующее свойство, которое добавляется в следующем упражнении:

2) Привести пример графика функции, обладающей свойствами, указанными в упражнении 1, и, кроме того, такой, что для любых x_1 и x_2 выполняется равенство

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2). \tag{1}$$

Для того чтобы понять, как влияет это свойство на вид графика, придется провести некоторое исследование. Прежде всего, мы можем узнать, чему равно $f(0)$. Действительно, в силу равенства (1) $f(0 + 1) = f(0) \cdot f(1)$; но $f(0 + 1) = f(1)$. Получается, что $f(1) = f(0) \cdot f(1)$, откуда следует, что $f(0) = 1$.

Итак, если функция обладает свойством (1), то ее значение в точке O обязательно равно 1! Значит, график функции уточняется.

Следующим шагом можно определить $f(2)$. Эту задачу можно предложить учащимся для самостоятельного решения. Скорее всего, они сообразят воспользоваться тем, что $f(2) = f(1 + 1)$, откуда $f(2) = f(1) \cdot f(1) = 3 \cdot 3 = 3^2$.

После этого можно предложить им показать, что $f(n) = 3^n$:

$$f(n) = f(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{f(1) \cdot f(1) \ldots f(1)}_{n \text{ раз}} = 3 \cdot 3 \ldots 3 = 3^n$$

(строго говоря, эту формулу надо доказывать методом математической индукции, но, чтобы не отвлекаться, можно предложить это в качестве упражнения на применение этого метода).

Подробно показывать в общем виде, как из свойств $\exp_a(x)$

получается правило вычисления ее значений для любого рационального значения аргумента, на уроке нецелесообразно*. Достаточно, проведя с участием учащихся доказательства для $x = 0$ и для $x = n$, продемонстрировать на примере идею доказательства для дробных и отрицательных x. Например, докажем, что $\exp_a\left(\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}}$. Так как $\exp_a\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \exp_a\left(\frac{1}{2}\right) = \exp_a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \exp_a (1) = a$, откуда $\exp_a\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. Для отрицательных значений аргумента тоже лучше взять числовой пример $\exp_2(-3 + 3) = \exp_2(0) = 1$, а с другой стороны, $\exp_2(-3 + 3) = \exp_2(-3) \times \exp_2(3)$, то $\exp_2(-3) = \frac{1}{\exp_2(3)} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$.

Этих примеров вполне достаточно, чтобы проиллюстрировать окончательный вывод, который и должны усвоить учащиеся: свойства 1—3 однозначно определяют функцию, значения которой в рациональных точках вычисляются по формуле $f(x) = a^x$, и, значит, введенная нашим определением экспонента с основанием a для рациональных значений аргумента совпадает с показательной функцией $f(x) = a^x$.

Как пояснить, что и для иррациональных x значения $\exp_a$ вычисляются по той же формуле, зависит от того, шла до сих пор речь об определении степени с иррациональным показателем или

---

* Приводим для учителя одну из возможных схем вывода формулы $\exp_a(x) = a^x$ для рациональных значений аргумента.

а) Пусть $x = 1/q$, где q — натуральное.

$$\underbrace{\exp_a\left(\frac{1}{q}\right) \cdot \exp_a\left(\frac{1}{q}\right) \ldots \exp_a\left(\frac{1}{q}\right)}_{q \text{ раз}} = \exp_a\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}\right) =$$

$$= \exp_a(1) = a, \text{ т. е. } \left(\exp_a\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q = a, \text{ откуда } \exp_a\left(\frac{1}{q}\right) = a^{\frac{1}{q}}.$$

б) Пусть $x = p/q$, где $p, q \in N$.

$$\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \exp_a\underbrace{\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}\right)}_{p \text{ раз}} = \underbrace{\exp_a\left(\frac{1}{q}\right) \cdot \exp_a\left(\frac{1}{q}\right) \ldots}_{p \text{ раз}}$$

$$\ldots \exp_a\left(\frac{1}{q}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}}.$$

Таким образом, для положительных рациональных значений x формула доказана.

в) Так как $\exp_a(-x) \cdot \exp_a(x) = \exp_a(-x + x) = \exp_a(0) = 1$, то $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$, откуда для отрицательного значения аргумента $-\frac{p}{q}$ имеем:

$$\exp_a\left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{\exp_a\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{1}{a^{p/q}} = a^{-\frac{p}{q}}.$$

нет. Если это определение уже введено, то распространение правила на случай иррационального аргумента следует из монотонности (свойство 2). При этом возможно примерно такое пояснение:

«Мы видим, что для рациональных x экспонента совпадает с показательной функцией $f(x) = a^x$, которая, как мы знаем, при $a > 1$ является возрастающей, а при $a < 1$ — убывающей, т. е. обладает свойством 2. Вспомним, что степень с иррациональным показателем определяется условиями $a^{\underline{x}} < a^x < a^{\overline{x}}$ для $a > 1$ (или $a^{\overline{x}} < a^x < a^{\underline{x}}$ для $0 < a < 1$), где $\underline{x}$ и $\overline{x}$ — десятичные приближения числа x, т. е. $\underline{x} < x < \overline{x}$. Отсюда достаточно очевидно — и это можно строго доказать,— что и в иррациональных точках экспонента, т. е. функция, определяющаяся свойствами 1—3, будет совпадать с показательной».

Если же степень с иррациональным показателем еще не определялась, то нужна другая логика объяснения: «Чтобы формула $\exp_a x = a^x$ определяла функцию, монотонную (или непрерывную) на всей числовой прямой, придется считать, что смысл степени с иррациональным показателем определяется условиями: $a^{\underline{x}} < a^x < a^{\overline{x}}$ для $a > 1$ или $a^{\overline{x}} < a^x < a^{\underline{x}}$ для $0 < a < 1$».

Более детальный разбор вопроса о значениях $\exp_a$ в иррациональных точках представляется нецелесообразным. Проверить понимание можно с помощью вопросов и упражнений, например: «Что больше: 8 или 2^π? (Ответ. $2^\pi > 2^3$, так как $\pi > 3$ и $\exp_2 x = 2^x$ возрастает на всей числовой прямой.) Чему равен $\lim\limits_{x \to 2} 3^x$? (Ответ. $\lim\limits_{x \to 2} 3^x = 3^2 = 9$, так как $\exp_3(x) = 3^x$ непрерывна на всей числовой прямой.)» И т. п.

Другой вариант разбора определения показательной функции в X классе акцентирует внимание учащихся на понятии функции как математической модели связи различных явлений. Такой подход дает возможность разъяснить учащимся, почему показательная функция служит моделью для широкого класса разных по своей природе процессов и закономерностей и чем именно характеризуется этот класс. Это подчеркивает важную в мировоззренческом плане мысль о том, что широта применимости математических методов, общность математических понятий определяются единством материального мира.

Ниже приводятся материалы для беседы с учащимися, разработанные на основе материалов Всесоюзной заочной математической школы с использованием бесед и лекций И. М. Гельфанда и Э. Э. Шноля.

Изучение функций в школе начинается с самой простой — с линейной функции. Показательная функция, к изучению которой мы сейчас приступаем, с некоторой точки зрения есть следующая по сложности после линейной. Показательную функцию в VIII классе мы определяли довольно сложно, определяя смысл выражения a^x

отдельно для разных множеств чисел. Между тем показательная функция обладает очень простым и важным свойством, которое и определяет ее значение и широту применимости к описанию и исследованию разного рода процессов и явлений.

Сравним ситуации, которые описываются линейной функцией, с ситуациями, для описания которых употребляется показательная функция.

Пусть некоторая величина изменяется с постоянной скоростью по сравнению с изменением другой величины, как например путь при равномерном движении по сравнению со временем или длина нагреваемого стержня по сравнению с изменением температуры. Процессы такого рода описываются линейной функций $y = kx + b$, важным свойством которой является то, что равным приращениям аргумента x соответствуют равные приращения функции y. Другими словами, в равномерно текущем процессе за равные промежутки времени значение переменной величины изменяется на одно и то же число. Такая связь между величинами очень распространена в природе и технике, чем и объясняется то, что линейная функция так часто используется.

Однако есть другой класс явлений, в некотором смысле почти такой же простой, когда при изменении значений некоторой величины на одно и то же число значение другой величины увеличивается или уменьшается не на одно и то же число, а в одном и том же отношении.

Разберем примеры*.

1. Если однолетнее растение дает 100 семян и из них прорастает половина, то за каждый год, т. е. при увеличении времени на единицу, число растений увеличивается в 50 раз. (Конечно, в естественных обычных условиях погибает большая часть растений, но в идеальных условиях, которые иногда возникают в природе или создаются искусственно человеком, рост числа особей идет именно так.)

2. Сберкасса выплачивает вкладчикам проценты по вкладам в размере 2% в год, т. е. за каждый год вклад увеличивается в 1,02 раза.

При использовании этого примера следует иметь в виду, что проценты начисляются только в конце года (т. е. формула, выражающая зависимость величины вклада от времени, $y = 1{,}02^x$ верна только для целых значений x), а в течение года считается, что вклад растет линейно: за полгода начисляется 1%, за три месяца (если вкладчик снимет вклад) — полпроцента и т. д.

3. При передаче электроэнергии по подводному кабелю потери в силе тока за счет утечки в воду пропорциональны длине кабеля. Например, на каждом километре сила тока уменьшается на 0,5%.

---

* Учитель может выбрать наиболее подходящие из этих примеров или найти свои.

Петитом даются пояснения для учителя, которые помогут ему чувствовать себя уверенным, имея дело с материалом, о котором учащиеся знают из других учебных предметов.

Тогда при увеличении расстояния от источника энергии на 1 км сила тока будет изменяться в отношении 1 : 0,995.

4. При радиоактивном распаде за определенный промежуток времени распадается определенная часть общего числа атомов. Например, за время, равное $4,5 \cdot 10^9$ лет при распаде урана-238 распадается половина от начального числа атомов, т. е. при увеличении времени на 4,5 млрд. лет число атомов уменьшается в 2 раза.

Каждый отдельный атом радиоактивного вещества распадается внезапно, случайно. Так что если бы мы наблюдали за одним атомом урана, то предсказать, когда он распадется — через одну секунду или через миллион лет,— было бы невозможно. Но если бы у нас был один грамм урана, то можно было бы твердо сказать, что за 4,5 миллиарда лет от него останется половина. Доля распадающихся атомов не зависит от того, сколько атомов имеется, лишь бы их число было достаточно велико.

Такого рода законы, действие которых проявляется только при весьма большом числе объектов, носят название статистических. Так, например, когда говорят, что 50% населения составляют мужчины, а 50% — женщины, то это правило проявляется только для достаточно больших групп населения: в одной квартире, например, могут жить четыре женщины и один мужчина, но уже в поселке с тысячным населением этот закон проявится достаточно четко: там будет 400—500 мужчин и соответственно 500—400 женщин. В городе же со стотысячным населением будет почти точно 50% женщин и 50% мужчин (конечно, если не будет каких-либо необыкновенных условий: например, во время войны в прифронтовых районах было, естественно, больше мужчин, а в тылу — женщин).

5. При искусственном выращивании каких-либо микроорганизмов (например, при разведении дрожжей или кефирных грибков на заводах, при изготовлении пенициллина, при выращивании в лаборатории какого-либо вида клеток для научных исследований), когда обеспечиваются особо благоприятные условия для жизни организмов (постоянная температура, наличие достаточного количества питательных веществ, «жизненное пространство» и т. д.), размножение клеток идет так, что за некоторый определенный промежуток времени (этот промежуток времени называется длиной митотического цикла) каждая клетка делится на две дочерние клетки. Когда клеток много, т. е. когда имеется, как говорят, колония клеток (колония клеток, выращиваемая в искусственных условиях, называется культурой клеток), то в каждый момент какая-то часть клеток делится, какая-то еще продолжает расти, подготовляясь к делению*. Но для каждой клетки от ее возникновения из материнской до деления проходит одно и то же время. Поэтому за равные отрезки времени число клеток в колонии увеличивается в одном и том же отношении, рост колонии идет постепенно, причем, когда

---

* *Исключение составляют так называемые синхронизированные культуры, для которых специально добиваются, чтобы все клетки делились одновременно.*

время увеличивается на длину митотического цикла, число клеток увеличивается в два раза.

Во всех приведенных примерах рассмотрены такие процессы, такие явления, для которых характерно общее свойство: при изменении значения одной величины на некоторое постоянное число значение другой величины изменяется в одном и том же отношении, т. е. умножается на постоянный множитель.

В примере 1 при возрастании времени на 1 год число растений увеличивалось в 50 раз, т. е. умножалось на 50. В примере 2 при увеличении времени на 1 год величина вклада увеличивалась на 2%, т. е. умножалась на 1,02; в примере 3 при увеличении расстояния на 1 км значение силы тока уменьшалось на 0,5%, т. е. умножалось на 0,995, и т. д.

Характерно то, что и за другие равные промежутки времени изменение рассматриваемой величины следует тому же закону. Например, за любые два года число растений (пример 1) увеличивается в 2500 раз.

Если проводить, как это всегда делается в математике, изучение таких зависимостей между величинами, отвлекаясь от реального смысла процесса, то задачу можно сформулировать так: «Найти функцию, обладающую следующим свойством: если аргумент получает равные приращения, то значения функции увеличиваются (или уменьшаются) в одном и том же отношении».

Дальнейшее изложение в зависимости от резерва времени, степени заинтересованности класса и других обстоятельств можно повести по одному из двух путей. Первый состоит в том, чтобы сразу сообщить учащимся, что таким свойством обладает показательная функция $f(x) = a^x$, знакомая им по курсу VIII класса, и показать (на примерах или в общем виде), что, действительно, равным приращениям аргумента соответствует увеличение или уменьшение значений функции в одном и том же отношении.

При втором варианте изложения учащиеся подводятся к тому, чтобы подыскать, построить, «открыть» такую функцию, свойства которой отражают свойства процессов такого класса, т. е. опять-таки, исходя из свойств процессов, найти правило вычисления значений функции по значениям аргумента. При этом разъяснения целесообразно вести с опорой на конкретный пример.

Пусть, например, имеется колония клеток (пример 3). Начальное число клеток примем за единицу, т. е. положим, что $f(0) = 1$. Единицей времени будет служить отрезок времени, за который численность удваивается (т. е. длина митотического цикла). Для определенности удобно считать, что единица равна, например, суткам. Тогда $f(1) = 2$.

Из характера процесса следует, что при увеличении аргумента на единицу значение функции удваивается; значит,

$f(1) = 2$

$f(2) = 2 \cdot 2 = 2^2$

$f(3) = 2^2 \cdot 2 = 2^3$ и т. д. и вообще для x — натуральных $f(x) =$

$= 2^x$. Вспомнив, что $2^0 = 1$, убедимся, что эта формула годится и для $x = 0$.

Значение $f(-1)$, т. е. численность колонии за сутки до начала отсчета будет вдвое меньше начального, т. е. $f(-1) = 1/2 = 2^{-1}$, аналогично $f(-2) = 1/2 \cdot f(-1) = 1/2 \cdot 1/2 = 2^{-2}$ и вообще $f(-n) = 2^{-n}$ и, значит, формула $f(x) = 2^x$ годится для всех целых x.

Самым интересным моментом является вопрос о значении для дробных x. Здесь придется преодолеть некоторые психологические трудности, некоторую инерцию мышления, из-за которой учащиеся бессознательно переносят на случай показательного роста свойства линейной зависимости. Например, они обычно считают, что если за сутки численность увеличится вдвое, то за полсуток численность увеличивается в полтора раза. (Это, конечно, неверно, так как тогда за целые сутки, т. е. за «дважды по полсуток» увеличение получится не вдвое, а в $1,5 \cdot 1,5 = 2,25$ раза.) Другая ошибка того же рода: «если за каждый год вклад (см. пример 3) возрастает на 2%, то за два года увеличение составит 4%». На самом деле получится прирост в 4,04%, так как во второй год проценты начисляются не только на первоначальный вклад, но и на проценты за первый год.

Правильный ход рассуждений для отыскания, например, значения $f(1/2)$ такой. Обозначим $f(1/2) = k$. Тогда за первую половину суток численность колонии увеличивается в k раз. За вторую половину суток численность по условию должна увеличиться еще в k раз; значит, за целые сутки увеличение составит $k \cdot k = k^2$. Но за целые сутки происходит увеличение вдвое, откуда $k^2 = 2$, $k = \sqrt{2}$, и, значит, $f(1/2) = 2^{1/2}$.

Эту схему рассуждений заучивать, конечно, не нужно, но понять и даже «почувствовать» характер экспоненциального роста очень важно.

Полезно, используя графики линейной и показательной функций, подчеркнуть, что для линейной функции абсолютный прирост постоянен (при постоянном x), а относительный, т. е. прирост в процентах, убывает. Для показательной же функции постоянен именно относительный прирост, а абсолютный изменяется пропорционально значению функции. Другими словами, скорость изменения линейной функции постоянна, а скорость изменения показательной функции пропорциональна ее значению. Переведя это на язык символов, мы получаем дифференциальное уравнение линейной зависимости $y' = k$ и дифференциальное уравнение показательной функции $y' = ky$.

Производная показательной функции

При выводе формулы производной из множества показательных функций $y = a^x$ выделяется та, график которой в точке (0; 1) имеет касательную, наклоненную к оси OX под углом 45°. Основание этой функции обозначается буквой «e», производная ее при $x = 0$ равна 1, так как тангенс угла наклона касательной в этой точке равен единице. Причину выделения именно этой функции можно пояснить сходством поведения при $x = 0$ таких функций, как $y = x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ и вновь рассматриваемой. Касательные к графикам каждой из них, проведенные в точке с абсциссой $x = 0$, наклонены к оси OX под углом 45°.

Факт существования такой функции у учащихся не вызывает сомнения. Наглядному его пояснению, а также оценке величины основания (числа e) поможет включение в домашнее задание построения графиков функций $y = (1{,}5)^x$, $y = 2^x$, $y = (2{,}5)^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$. Это лучше сделать непосредственно перед уроком, где будет изучаться вопрос. Так как построение достаточно трудоемко, разным ученикам рекомендуется предложить для построения разные графики. Количество их тем самым можно увеличить, включив и такие, как $y = (2{,}6)^x$, $y = (2{,}7)^x$, $y = (2{,}8)^x$, $y = (2{,}9)^x$. Каждый ученик должен для своего графика построить касательную в точке (0; 1) и измерить с помощью транспортира угол между касательной и осью OX. Объясняя домашнее задание, учителю нужно обратить внимание учащихся на масштаб выполняемых графиков (он должен быть крупнее, построение лучше выполнить на миллиметровой бумаге), а также на способ вычисления значений функции или на правило построения точек графика. Так, например, для функции $y = (2{,}6)^x$, подсчитав значения функции при $x = 1$ (2,6) и $x = -1$ $\left(\frac{1}{2{,}6} \approx 0{,}38\right)$, ученик по таблице квадратных корней сможет найти значения функции при $x = 1/2$ $\left(2{,}6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2{,}6} \approx 1{,}61\right)$, при $x = 1/4$ $\left(2{,}6^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{2{,}6}} \approx \sqrt{1{,}61} \approx 1{,}27\right)$, также и при $x = -1{,}2$, $x = -1/4$, $x = 1/8$ и $x = -1/8$. Для построения точек графика значения функции можно округлять до десятых долей.

На уроке учитель должен проверить выполнение этого задания и выписать на доске (или приготовить заранее соответствующий плакат) функции и соответствующие углы наклона проведенных касательных:

$$
\begin{array}{ll}
y = 2^x & \alpha \approx 35^\circ \\
y = (2{,}5)^x & \alpha \approx 41^\circ \\
y = (2{,}6)^x & \alpha \approx 43{,}5^\circ \\
y = (2{,}7)^x & \alpha \approx 45^\circ \\
y = (2{,}8)^x & \alpha \approx 46^\circ \\
y = (2{,}9)^x & \alpha \approx 46{,}5^\circ \\
y = 3^x & \alpha \approx 47{,}5^\circ \\
y = (3{,}5)^x & \alpha \approx 51^\circ \\
y = 4^x & \alpha \approx 54^\circ
\end{array}
$$

Из приведенных результатов учащиеся смогут примерно оценить, каким должно быть основание показательной функции, чтобы угол наклона касательной к ее графику в точке (0,1) был равен 45°. Учитель сообщает, что это число (основание такой функции) имеет в математике очень большое значение, оно иррациональное и приближенно равно 2,7. Подобно числу π для этого числа введено специальное обозначение — «e» ($e \approx 2{,}7182818284590\ldots$)

Логарифмическая функция

При изложении логарифмической функции в X классе, как правило, особых трудностей у учителей не возникает, однако усвоение этого понятия учащимися оставляет желать много лучшего. На вступительных экзаменах в вузы, например, вызывает большие затруднения обоснование тех или иных свойств логарифмической функции. Это относится и к другим функциям, но здесь случай особый: почти все свойства логарифмической функции следуют из свойств показательной функции и теоремы об обратной функции. С этой точки зрения вопрос о свойствах логарифмической функции представляется одним из наиболее простых (по сравнению с аналогичными вопросами для других функций). А так как фактическое знание этих свойств учащиеся уже имеют из VIII класса, то в X можно несколько больше времени уделить обоснованию.

Для более осознанного усвоения логарифмической функции в X классе можно рекомендовать увеличить долю самостоятельной работы школьников в получении (а точнее, даже в повторении) знаний. Действительно, ученикам уже многое известно из курса VIII класса о свойствах десятичных логарифмов. Здесь же производится перенос некоторых их свойств на логарифмы с общим основанием, что не представляет значительных трудностей. При этом нам кажется целесообразным при доказательстве теорем о логарифме произведения, степени и частного использовать не соответствующие свойства десятичных логарифмов, а важный метод доказательства, который не один раз уже применялся ранее (например, при доказательстве свойств радикалов). Действительно, сравним:

Доказать, что для всех $x > 0$. $y > 0$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

Доказательство.

По определению, логарифм положительного числа x по основанию a есть такой показатель степени y, в который надо возвести основание a, чтобы получить x. $\log_a x = y$, $a^y = x$.

Доказать, что для всех $x > 0$ и $y > 0$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}.$$

Доказательство.

По определению, корень n-й степени из положительного числа x есть такое число y, n-я степень которого равна x: $\sqrt[n]{x} = y$, $y^n = x$.

Найдем степень числа a с показателем $\log_a x + \log_a y$:

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y.$$

Следовательно, по определению логарифма числа xy по основанию a, имеем:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

Найдем n-ю степень произведения $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$:

$$\left(\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}\right)^n = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = xy.$$

Следовательно, по определению корня n-й степени из числа xy, имеем:

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}.$$

Производная логарифмической функции

С целью облегчения изложенного в учебном пособии вывода формулы для вычисления производной логарифмической функции, приведем распространенный в практике учителей способ. Он использует факт существования производной этой функции, доказательство которого можно, согласно программе, не проводить, а заменить наглядным пояснением: так как в любой точке графика показательной функции к нему можно провести касательную, а графики показательной и логарифмической функции симметричны относительно биссектрисы I—III координатных углов, то в любой точке графика логарифмической функции к нему тоже можно провести касательную, а это равносильно существованию производной функции в каждой точке.

Используя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a x} = x$ $(x > 0)$, подсчитаем производную его левой и правой частей. Разумеется, раз сами функции тождественно равны, равны и их производные, т. е.

$$\left(a^{\log_a x}\right)' = 1, \text{ или } \left(a^{\log_a x} \cdot \ln a \cdot (\log_a x)' = 1 \Longrightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\right.$$

Справедливость такого рассуждения учащимся можно подтвердить, приведя аналогичные примеры об уже известных им функциях, например:

$$\left((\sqrt{x})^2 = x) \Longrightarrow (2\sqrt{x}(\sqrt{x})' = 1) \Longrightarrow ((\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \right).$$

При таком подходе *учащиеся почти самостоятельно* смогут вычислить и производные других известных им обратных функций — $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ и т. д. А именно: $(\sin(\arcsin x) = x \Rightarrow$ $\Rightarrow([\sin(\arcsin x)]' = 1) \Rightarrow [\cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1] \Rightarrow (\arcsin x)' =$ $= \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$.

А так как $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$, то окончательно имеем: $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Рекомендуем включить в систему задач следующие упражнения:

1. Построить график какой-либо функции $y = f(x)$,

а) определенной на множестве действительных чисел и монотонной;

б) определенной на множестве положительных чисел;

в) определенной на множестве действительных чисел, принимающей только положительные значения и такой, что $f(0) = 1$;

г) определенной на множестве положительных чисел ($D(f) = R^+$) и принимающей все действительные значения ($E(f) = R$);

д) определенной на множестве $[-2; 2]$ и принимающей положительные значения на промежутке $]0; 2]$;

е) то же, что и в д), но функция монотонна;

ж) определенной на множестве $[-2; 2]$ и принимающей положительные значения только на промежутке $[0; 2]$, (здесь требуется определенный скачок в мышлении школьников. Функция, оказывается, в этом случае получается разрывной; никакая непрерывная функция не может удовлетворить требуемому условию);

з) возрастающей, определенной на множестве положительных чисел и такой, что $f(1) = 0$;

и) убывающей, определенной на множестве действительных чисел и такой, что $f(0) = 1$;

к) возрастающей, определенной на множестве действительных чисел и принимающей только положительные значения ($D(f) = R$, $E(f) \subset R^+$);

л) определенной на множестве действительных чисел ($D(f) = R$) и такой, что $f(0) = 1$, а при $x \neq 0$ $x \cdot f(x) > 0$; и т. д.

2. Функция $y = f(x)$ монотонно возрастающая и определена на множестве действительных чисел. Решите уравнения и неравенства:

а) $f(x) > f(2)$; б) $f(x) = f(-3)$; в) $f(x) < f(5)$.

Указание: в этом упражнении решение основывается либо на монотонности обратной функции, либо на методе исключения лишнего. Например, в задании а):

1) x не может быть меньше 2, так как тогда в силу монотонного возрастания функции $y = f(x)$ было бы $f(x) < f(2)$, что противоречит условию.

2) x не может быть равно 2, так как тогда бы и $f(x)$ равнялось бы $f(2)$, что также противоречит условию. Остается лишь, что x должно быть больше 2. Так как функция определена на множестве действительных чисел, то любое число, большее 2, обращает неравенство в истинное высказывание; следовательно, решением будет множество $]2; +\infty[$.

3. Функция $y = f(x)$ монотонно убывающая и определенная на множестве положительных чисел.

Сравните: а) $f(2)$ и $f(5)$; б) $f(13)$ и $f(\sqrt{31})$.

Решите уравнения и неравенства:

а) $f(x) = f(5)$; б) $f(x) > f(2)$; в) $f(x) < f(3)$; г) $f(17) < f(x)$.

4. Функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ взаимно обратные, определенные на множестве действительных чисел и принимающие все действительные значения, обе монотонно возрастающие.

Решить уравнения и неравенства:

а) $f(x) = 3$; б) $g(x) = 5$; в) $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0$; г) $g^2(x) - 5g(x) + 6 > 0$; д) $f(x) < 12$ и т. д.

5. Функция $y = f(x)$ монотонно возрастает и определена на множестве действительных чисел, принимает все положительные значения. Функция $x = g(y)$ — обратная для $y = f(x)$ (она определена на множестве положительных чисел).

Решите уравнения и неравенства:

а) $f^2(x) = 4$; б) $f^2(x) < 4$; в) $g(x) < 2$; г) $g^2(x) = 4$; д) $g^2(x) > 9$.

Среди упражнений по закреплению свойств показательной функции рекомендуем включить следующие:

1. Постройте схематично график функции:

а) $y = a^{-x}$ при $0 < a < 1$;
б) $y = a^{2x}$ при $0 < a < 1$;
в) $y = a^{-x}$ при $a > 1$;
г) $y = a^{2x}$ при $a > 1$.

2. На чертеже (рис. 1) изображен график одной из пяти следующих функций:

а) $y = a^x$, $0 < a < 1$;
б) $y = a^{x-1}$, $a > 1$;
в) $y = a^x - 1$, $0 < a < 1$;
г) $y = a^{x+1}$, $0 < a < 1$;
д) $y = a^x + 1$, $0 < a < 1$.

График какой функции изображен? Изобразите схематически графики функций в остальных случаях.

3. а) Постройте график функции $y = 5^x$ по значениям ее в двух точках с абсциссами $x = 0$ и $x = 1$.

б) Постройте график функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ по значениям ее в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = -1$.

4. На одном чертеже (рис. 2) изображены графики двух функций:

а) $y = x^2$ и $y = x^3$ для $x \in [0; +\infty[$;

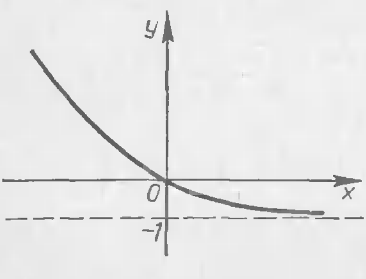


Рис. 1

б) $y = x^{\frac{2}{3}}$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$ для $x \in [0; \infty[$;

в) $y = x^{-2}$ и $y = x^{-3}$ для $x \in]0; \infty[$.

В каждом случае укажите по чертежу масштаб по осям координат. Укажите, где и какой график изображен? Почему?

1. Постройте схематично графики функций:

а) $y = \log_a x$, $a > 1$;

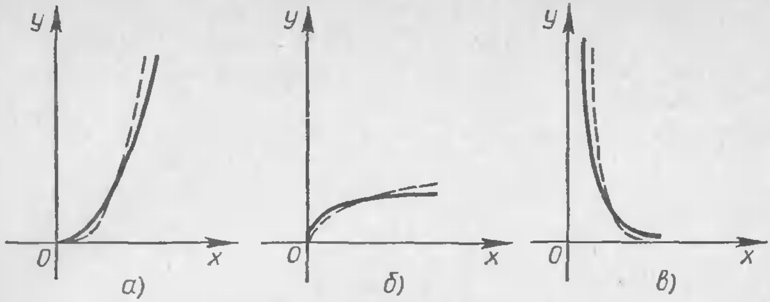


Рис. 2

б) $y = \log_a x,\ 0 < a < 1$;
в) $y = \log_{2a} x,\ a > 1$;
г) $y = \log_{\frac{1}{a}} x,\ a > 1$.

2. На чертеже (рис. 3) изображен график одной из пяти следующих функций:

а) $y = \log_2 x$;
б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$;
в) $y = \log_4 x$;
г) $y = \log_4 (-x)$;
д) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

График какой функции изображен?

Постройте графики остальных функций.

3. На чертеже (рис. 4) изображен график одной из пяти следующих функций:

а) $y = \log_a x,\ 0 < a < 1$;
б) $y = \log_a x + 1,\ a > 1$;
в) $y = \log_a (x + 1),\ a > 1$;
г) $y = \log_a (x + 1),\ 0 < a < 1$;
д) $y = \log_a (x - 1),\ 0 < a < 1$.

График какой функции изображен? Изобразите схематично графики остальных функций.

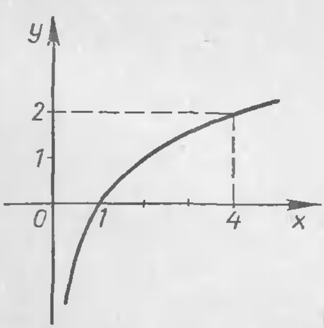


Рис. 3

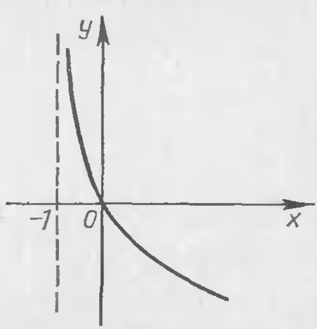


Рис. 4

Н. К. Беденко

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ ПРИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОМ ПОВТОРЕНИИ

Заключительное повторение имеет своей целью обобщение основных понятий, ведущих идей курса алгебры и начал анализа, с тем чтобы углубить и систематизировать знания учащихся по предмету. Тема «Уравнения и неравенства» в школе изучается в течение многих лет. При этом изучение одних и тех же вопросов каждый раз происходит на более высоком уровне.

Известно, что не всегда первичное понимание изучаемого материала является настолько глубоким, чтобы появилась возможность широкого обобщения, классификации. При заключительном повторении такая возможность имеется, а это приводит к осмысливанию, углублению и закреплению материала.

Правильно организованное заключительное повторение этой темы способствует объединению в целое материала, выделению общих идей, систематизирует знания учащихся путем раскрытия новых связей и углубления уже известного. При этом знания учащихся уточняются, становятся более прочными и осознанными, повышается их общая математическая культура. Здесь имеется возможность ликвидировать имеющиеся у некоторых учащихся пробелы в знаниях по решению уравнений и неравенств отдельных видов, рассматриваемых при изучении свойств соответствующих функций.

При повторении сведения, полученные учащимися ранее, объединяются, сравниваются, приводятся в систему и закрепляются в применении к решению задач.

Систематизации теоретических сведений способствует применение всякого рода таблиц.

* * *

Повторение темы «Уравнения» должно начинаться с повторения основных сведений о функциях и их свойствах. Здесь особое внимание уделяется свойствам показательной, логарифмической и тригонометрических функций, применяемых при решении уравнений и неравенств. Большую помощь в этой работе оказывают таблицы, в которых выделены те сведения о функциях, без знания которых нельзя решать соответствующие уравнения и неравенства: область определения, множество значений функции, промежутки знакопостоянства, промежутки монотонности, нули функции, график функции. Можно составить сводную таблицу свойств основных функций, применяемых при решении уравнений и неравенств.

После повторения сведений о свойствах функций для устного решения можно предложить такие упражнения:

Найдите область определения функции:

1. $y = 3x + 5$.
2. $y = x - 3$.
3. $f(x) = \frac{1}{x-3}$.
4. $g(x) = \frac{3x+5}{x-3}$.
5. $h(x) = \sqrt{x-3}$.
6. $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$.
7. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.
8. $y = 3^{2x}$.
9. $f(x) = \log_2 (x - 3)$.
10. $g(x) = 2\sin 3x$.
11. $h(x) = 3\cos 2x$.
12. $\varphi(x) = 2\,\mathrm{tg}\, x$.
13. $y = \mathrm{tg}\, 2x$.
14. $y = \frac{2}{\sin x}$.

Найдите множество значений функции:

1. $f(x) = 5x - 3$.
2. $g(x) = \frac{3}{x-2}$.
3. $h(x) = x^2$.
4. $y = \sqrt{x^2 - 1}$.
5. $y = 2^x$.
6. $y = \log_3 2x$.

Найдите нули функции:

1. $y = 2x$.
2. $y = 2x - 5$.
3. $y = 2x^2 - x$
4. $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
5. $g(x) = \log_5 (x - 4)$.
6. $h(x) = 2^x - 1$.
7. $\varphi(x) = \frac{x-4}{x-1}$.
8. $y = 2\sin x$.

К этим упражнениям можно добавить и примеры на нахождение промежутков знакопостоянства функции:

1. $y = x^2 - 3x + 2$.
2. $f(x) = x^2 - 2x$.
3. $g(x) = x^2 - 3x$.
4. $h(x) = 2^x - 1$.
5. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$.
6. $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x-3)$.
7. $g(x) = \frac{x-2}{x-3}$.
8. $h(x) = 5x - x^2$.

Упражнения на нахождение промежутков знакопостоянства функции легко выполняются с применением метода интервалов в

№ 1—3, 6—8 и с использованием свойств показательной функции в № 4, 5.

При заключительном повторении в системе упражнений для письменного выполнения особое внимание следует уделить примерам на нахождение области определения логарифмической функции, так как основные ошибки в решении логарифмических уравнений и неравенств вызваны тем, что учащиеся либо не находят область допустимых значений переменной, либо находят ее неверно. Это приводит к получению посторонних корней, потере корней.

В таблицах, систематизирующих сведения об уравнениях с одной переменной, должны найти место основные теоремы о равносильности уравнений.

Решение любого уравнения из школьного курса сводится к решению систем или совокупностей простейших уравнений.

В школьной практике часто бывает так, что учащиеся затрудняются именно в выборе метода решения, в выборе способа сведения решения уравнения к решению простейших. Так как при определении метода решения данного уравнения используются такие логические приемы, как выявление признаков, сравнение объектов по сходству и различию и т. п., то специальное внимание к этому этапу решения уравнений при заключительном повторении способствует не только повышению уровня знаний учащихся, но и их развитию. Поэтому, не останавливаясь на решении простейших уравнений, рассмотрим возможности систематизации знаний учащихся о методах решения уравнений с одной переменной.

При повторении теории можно разобрать наиболее часто применяемые методы, например:

I. Сведением к квадратному уравнению путем введения вспомогательной переменной решаются:

1) показательные уравнения вида $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$;

2) логарифмические уравнения вида $A \log_a^2 x + B \log_a x + C = 0$;

3) тригонометрические уравнения вида $A \sin^2 x + B \sin x + C = 0$;

4) тригонометрические уравнения вида $A \cos^2 x + B \cos x + C = 0$;

5) тригонометрические уравнения вида $A \operatorname{tg}^2 x + B \operatorname{tg} x + C = 0$.

Схема решения уравнения:

1. Нахождение области допустимых значений переменной.

2. Приведение уравнения с помощью замены переменной

1) $a^x = y$; 2) $\log_a x = y$; 3) $\sin x = y$; 4) $\cos x = y$; 5) $\operatorname{tg} x = y$

к квадратному уравнению $Ay^2 + By + C = 0$.

3. Нахождение корней получившегося квадратного уравнения.

4. Решение данного уравнения сводится к решению совокупности двух уравнений:

1) $\left[\begin{array}{l} a^x = y_1; \\ a^x = y_2. \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} \log_a x = y_1; \\ \log_a x = y_2. \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} \sin x = y_1; \\ \sin x = y_2. \end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l} \cos x = y_1; \\ \cos x = y_2. \end{array}\right.$

5) $\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = y_1; \\ \mathrm{tg}\, x = y_2. \end{array}\right.$

II. Заменой данного уравнения совокупностью уравнений решаются уравнения, левая часть которых $P(x) = 0$ разлагается на множители: $P(x) = P_1(x) P_2(x) \ldots P_n(x)$. Решение приводит к совокупности уравнений с одной переменной $P_1(x) = 0$; $P_2(x) = 0$; ...; $P_n(x) = 0$. Решением этой совокупности является объединение множеств решений каждого из уравнений, входящих в нее.

Аналогичным образом, с иллюстрацией на примерах можно разобрать и такие приемы, как приведение к общему основанию, логарифмирование, графический способ и т. д.

После повторения сведений из теории можно предложить учащимся задание:

Определить методы решения следующих уравнений:

1. $3^{x+2} - 3^x = 72$.
2. $2^{\sqrt{x+3}} = 4$.
3. $3\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x \times \times \cos x = 0$.
4. $1 + \cos x - \sin x - \cos x \times \times \sin x = 0$.
5. $2^{x+4} + 2^{x+3} + 2^x = 5^{x+1} - 5^x$.
6. $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$.
7. $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$.
8. $\sin^2 x = \cos x - \cos^2 x$.
9. $(x^2 - 5)^2 + 14(x^2 - 5x) + + 48 = 0$.
10. $5\,\mathrm{tg}\, x \cdot \sin x - \sin x - - 5\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0$.
11. $\sin^2 \frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$.
12. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.
13. $1 - \cos 2x = 2\sin x$.
14. $2^x = 3$.
15. $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39$.
16. $5^3 = 25^{x+0,5}$.
17. $4^x - 2^{x+1} = 48$.
18. $\sin^3 x - \cos^3 x = 0$.
19. $x^4 + x^3 - 12x^2 = 0$.
20. $5^{x+2} + 11 \cdot 5^x = 180$.
21. $2^x = 3 + x$.
22. $\sin x \cdot \mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, x - - 3\sin x = 3$.
23. $x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = 0$.
24. $\cos 2x + \cos x = 0$.
25. $\lg^2 x = 4 - 3\lg x$.
26. $2 - \lg x = \lg^2 x$.

Такую классификацию уравнений можно провести на уроке. Если при этом уравнения первого вида привести к квадратному, второго вида — к совокупности уравнений, а для остальных уравнений указать способ их решения, то окончание решения этих уравнений можно дать для выполнения на дом, так как завершение решения этих уравнений уже не вызовет затруднений у учащихся.

Наибольшее число ошибок, допускаемых учащимися при решении уравнений и неравенств, приходится на логарифмические уравнения и неравенства. При этом основные ошибки, приводящие к получению посторонних корней или потере корней, связаны с тем, что не найдена область допустимых значений переменной или найдена неверно. Приведем примеры:

1. $\lg (x^2 - 3x - 5) = \lg (7 - 2x)$.

Решение.

Так как $D(\lg) = R_+$, то данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} 7 - 2x > 0 \\ x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3{,}5 \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 3{,}5 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3{,}5 \\ x = -3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. $\{-3\}$.

Если не найдена область допустимых значений переменной, то учащийся решает вместо системы только уравнение $x^2 - x - 12 = 0$ и получает посторонний корень $x = 4$ (выявить который, впрочем, можно, сделав проверку). Поэтому это уравнение можно решить и другим способом:

$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$; $D = 1 + 48 = 49$;

$x = \frac{1 \pm 7}{2}$; $x = -3$ или $x = 4$.

Проверка. 1. $x = -3$; $\lg (x^2 - 3x - 5) = \lg (9 + 9 - 5) = \lg 13$; $\lg (7 - 2x) = \lg (7 + 6) = \lg 13$; $\lg 13 = \lg 13$;
а) $x = 4$; $\lg (x^2 - 3x - 5) = \lg (16 - 12 - 5) = \lg (-1)$. Так как $D(\lg) = R_+$, то $x = 4$ — посторонний корень. Ответ. $\{-3\}$.

2. $\log_{x-2} 4 = 2$

Решение.

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 2 \neq 1 \\ (x - 2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 3 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 3 \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 3 \\ x = 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{нет решений} \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Ответ. $\{4\}$.

Если не учесть условия $x - 2 > 0$, $x \neq 3$, определяющие область допустимых значений переменной, то получим посторонний корень $x = 0$. Однако и в этом случае его легко отбросить при проверке. Действительно, так как выражение $\log_{0-2} 4$ не имеет смысла, то 0 не является корнем.

3. $\log_{x+1} (x^2 + 8x + 37) = 2$. (Решение таких уравнений не является обязательным, но его можно разобрать с теми учащимися, которые интересуются математикой.)

Р е ш е н и е.

Так как D (log) $= \boldsymbol{R}_+$ и для функции $y = \log_a t$ $a > 0, a \neq 1$, то данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 37 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \\ x^2 + 8x + 37 = (x + 1)^2 \end{cases}$$

Учащиеся же, забывая об условиях, налагаемых на основание логарифма, ограничиваются решением следующей смешанной системы:

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 37 > 0 \\ x^2 + 8x + 37 = (x + 1)^2 \end{cases}$$

При этом найденное из уравнения $x^2 + 8x + 37 = (x + 1)^2$ значение $x = -6$ удовлетворяет условию $x^2 + 8x + 37 > 0$, и учащиеся считают его корнем. Однако на самом деле -6 не входит в область допустимых значений переменного. Таким образом, множество решений данного уравнения пусто.

Как видно из примеров, все ошибки, связанные с приобретением посторонних корней, легко предотвращаются, если приучить учащихся при решении логарифмических уравнений проверять корни подстановкой их в данное уравнение (подобно тому, как они должны это делать при решении иррациональных уравнений). Запись решения уравнений сведением к системам употреблять целесообразно, главным образом, при разъяснении источника ошибки, а тренировать учащихся в этой записи (тем более, что знак [(знак совокупности) в школе не вводится) представляется нецелесообразным.

Несколько сложнее справиться с ошибками, приводящими к потере корней, вызванной сужением области допустимых значений переменной. Рассмотрим пример.

4. $\lg (x + 2)^2 = \lg 16$.

Так как D $(\lg) = \boldsymbol{R}_+$, то данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} (x + 2)^2 > 0 \\ (x + 2)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

О т в е т. $\{-6; 2\}$.

Учащиеся сужают область допустимых значений переменной, используя тождество $\lg x^2 = 2 \lg x$ и считая данное уравнение равносильным уравнению $\lg (x + 2) = \lg 4$, что приводит к следующей смешанной системе

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x = 2, \end{cases}$$ откуда $x = 2$.

Потерян корень $x = -6$, что обнаружить при проверке невозможно. В этом случае функция $\log_a (f(x))^2$ имеет более широкую область определения, чем функция $\log_a f(x)$.

Поэтому специально следует обратить внимание на применение тождества $\log_a x^2 = 2 \log_a x$ при решении уравнений, разъяснив суть дела на простых примерах типа следующего:

5. Уравнение $\log_5 x^2 = 4$ по определению логарифма означает, что $5^4 = x^2$, т. е. $x^2 = 625$. Это уравнение имеет два корня: $+25$ и

—25, и оба они являются корнями исходного, так как под знаком логарифма стоит не x, а x^2, а x^2 положителен и тогда, когда x отрицателен.

Если же мы заменим $\log_5 x^2$ выражением $2 \log_5 x$, то мы д о б а в и м к уравнению новое требование: $x > 0$, которого не было в исходной задаче, чем и создадим опасность потери корней.

Довольно часты ошибки, вызванные неправильно сделанными тождественными преобразованиями, особенно связанные с непониманием символа log.

Например, решая уравнение $\lg^2 10x + \lg x - 19 = 0$, выражение $\lg^2 10x$ можно записать так: $(\lg 10x)^2 = (\lg 10 + \lg x)^2 = (1 + \lg x)^2 = 1 + 2 \lg x + \lg^2 x$ — и привести данное уравнение к виду $\lg^2 x + 3 \lg x - 18 = 0$. Решая его, получим совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l}\lg x = 3 \\ \lg x = -6\end{array}\right.$

О т в е т. $\{10^{-6}; 10^3\}$.

Учащиеся выполняют тождественные преобразования следующим образом: $\lg^2 10 + \lg^2 x + \lg x - 19 = 0$, считая, что $\lg^2 10x = \lg^2 10 + \lg^2 x$, а это приводит к уравнению $\lg^2 x + \lg x - 18 = 0$.

* * *

Основные ошибки, допускаемые в решении логарифмических и показательных неравенств, связаны в большинстве случаев с двумя причинами:

1. Отбрасываются условия, определяющие область допустимых значений переменной.

2. Неправильно определяется характер монотонности логарифмической (показательной) функции.

Поясним случай двумя примерами:

1. Уравнение $2^x > 8$ учащиеся решают верно, переходя к неравенству того же смысла $x > 3$, а неравенство $0{,}2^x > 1$ часто заменяют неравенством $x > 0$, забывая, что показательная функция при $a < 1$ убывающая.

Поэтому при заключительном повторении следует специально разобрать случаи, когда при решении неравенств приходится переходить к неравенству противоположного смысла, а именно:

при $k < 0$ $\quad k \cdot f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$;

при $0 < a < 1$ $\quad a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x)$;

при $0 < a < 1$ $\quad \log_a (f(x)) > \log_a (\varphi(x)) \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x)$.

Полезно обратить внимание учащихся на то, что все эти случаи связаны с убыванием соответствующих функций: $y = kx$ (при $k < 0$), $y = a^x$ (при $0 < a < 1$) и $y = \log_a x$ (при $0 < a < 1$).

Можно рассмотреть и таблицу простейших неравенств, после чего особо подчеркнуть, что при делении неравенств на коэффициент k надо прежде всего обращать внимание на знак этого коэффициента, а при логарифмировании и потенцировании — на сравнение основания a с единицей.

Закрепить эти сведения особенно полезно на примерах, где знак k или смысл неравенства между a и 1 не очевидны, например:

1. $\dfrac{\log_{0,2}(x-3)}{\log_{0,2}2} > 3.$

Решение.

Так как $\log_{0,2} 2 < 0$, то данное неравенство равносильно неравенству $\log_{0,2}(x-3) < \log_{0,2}2^3$, которое равносильно системе $\begin{cases} x-3 > 8 \\ x-3 > 0, \end{cases}$ откуда $x > 11$. Множество решений данного неравенства $]11; \infty[$.

Учащиеся допускают ошибку при переходе от данного неравенства к равносильному ему неравенству $\log_{0,2}(x-3) < \log_{0,2} 2^3$, так как не учитывают, что функция $y = \log_a t$ при $0 < a < 1$ — монотонно убывающая, а следовательно, число $\log_{0,2} 2 < 0$.

2. а) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x+3} > 1;$ б) $\log_{\frac{3}{\pi}}(x^2-2x) > 0.$

Здесь не сразу видно, что $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\dfrac{3}{\pi}$ — числа, меньшие единицы, и учащиеся переходят к неравенствам того же смысла.

3. $\dfrac{\log_{0,3}(4x+15)}{\log_{0,3}(3x+7)} > 1.$

Решение.

а) Если $3x+7 > 1$, то $\log_{0,3}(3x+7) < 0$. Тогда данное неравенство равносильно* системе $\begin{cases} 3x+7 > 1 \\ 4x+15 > 0 \\ 4x+15 < 3x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -3{,}75 \\ x < -8 \end{cases}$

Множество решений системы пусто.

б) Если $0 < 3x+7 < 1$, то $\log_{0,3}(3x+7) > 0$. Тогда данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} 0 < 3x+7 < 1 \\ 4x+15 > 0 \\ 4x+15 > 3x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\frac{1}{3} < x < -2 \\ x > -3{,}75 \\ x > -8, \end{cases}$

откуда $-2\frac{1}{3} < x < -2$. Ответ. $\left]-2\frac{1}{3}; -2\right[$.

Учащиеся, не рассматривая знак знаменателя, зависящий от того, будет ли данное число $3x+7 > 1$ или $0 < 3x+7 < 1$, записывают систему $\begin{cases} 4x+15 > 3x+7 \\ 4x+15 > 0 \\ 3x+7 > 0, \end{cases}$ получая решение: $\left]-2\frac{1}{3}; \infty\right[$.

В этом случае, например, при $x = 0$, получаем: $\log_{0,3} 15 > \log_{0,3} 7$, что неверно.

Другим источником ошибок является, как и при решении уравнений, отбрасывание условий, задающих область допустимых значений переменного. Приведем пример: $\log_{12}(x^2-5x+6) < 1$.

---

*Более корректно сказать, что исходное неравенство равносильно совокупности двух систем.

Решение.

$D(\log_{12}) = R_+$. $\log_{12}(x^2 - 5x + 6) < \log_{12} 12$. Так как $12 > 1$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 12 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 6 \\ \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 2 \\ -1 < x < 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3 \\ -1 < x < 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 2 \\ 3 < x < 6. \end{array}\right.$$ Ответ. $]-1; 2[\cup]3; 6[$.

Если не учесть область допустимых значений переменного, то получаем ответ: $]-1; 6[$. В этом случае в множество решений входят и те значения переменной x, при которых число, стоящее под знаком логарифма, будет нуль или отрицательным. Действительно, при $x = 3$ $x^2 - 5x + 6 = 0$; при $x = 2\frac{1}{2}$ $x^2 - 5x + 6 = -\frac{1}{4} < 0$.

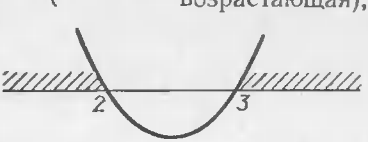
К сожалению, предотвратить ошибки, связанные с расширением области допустимых значений, способом, указанным для уравнений (проверкой) в случае неравенств невозможно.

Чтобы облегчить запись, можно рекомендовать учащимся такое «правило». После того как неравенство сведено к системе простейших неравенств (из которых часть определяет область допустимых значений переменного), нужно решить отдельно каждое из них, т. е. записать множество решений. Решением системы, т. е. решением данного уравнения, будет пересечение этих множеств. При этом, естественно, очень полезны графические иллюстрации.

Тогда запись решения неравенства предыдущего примера может выглядеть примерно так:

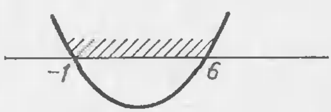
$$\log_{12}(x^2 - 5x + 6) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ (так как } D(\log_{12}) = R_+) \\ x^2 - 5x + 6 < 12 \text{ (так как функция } \log_{12} t \text{ — возрастающая),} \end{cases}$$

1) $x^2 - 5x + 6 > 0$;
$x_1 = 2$, $x_2 = 3$.



$]-\infty; +2[\cup]3; \infty[$

2) $x^2 - 5x - 6 < 0$;
$x_1 = -1$,
$x_2 = 6$.



$]-1; 6[$

3) Решение системы

Ответ. $]-1; 2[\cup]3; 6[$.

Все эти трудности встречаются при решении логарифмических неравенств, содержащих переменную в основании логарифма. Именно поэтому решение таких неравенств не является обязательным. Но рассмотреть соответствующие примеры при наличии возможности в процессе повторения очень полезно, например:

$$\log_{x-1}(2x+3) < 1.$$

Решение.

а) Если $x - 1 > 1$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x + 3 < x - 1 \\ 2x + 3 > 0 \\ x - 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > -1{,}5 \\ x > 2 \end{cases}$$ (Система решений не имеет.)

б) Если $0 < x - 1 < 1$, то данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} 0 < x - 1 < 1 \\ 2x + 3 > x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x > -4. \end{cases}$

Множеством решений будет промежуток $]1; 2[$.

При решении этого неравенства учащиеся, рассматривая второй случай, записывают $x - 1 < 1$, что приводит к системе

$$\begin{cases} x < 2 \\ x > -4, \end{cases}$$

решением которой является промежуток $]-4; 2[$.

В этом случае учащиеся в множество решений включают и те значения переменной x, при которых основание логарифма отрицательно, например при $x = -1$, $x = 0$.

Особый интерес при заключительном повторении представляют примеры уравнений и неравенств, при решении которых решающую роль играет предварительное исследование с использованием свойств различных функций.

Приведем примеры:

1. $2^{\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}} > -1.$

Решение.

Так как $f(t) = 2^t$ (показательная функция) имеет множество значений R_+, то данное неравенство справедливо при всех значениях t, входящих в область определения функции $t = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$. Следовательно, решение данного неравенства сводится к решению неравенства $\frac{x+2}{x-3} \geqslant 0$. Применяя метод интервалов, получаем решение: $]-\infty; -2] \cup]3; \infty[$.

Учащиеся, поступая по шаблону, при решении данного неравенства делают попытки заменять единицу нулевой степенью числа 2, а поскольку здесь в левой части неравенства стоит отрицательное число, то они запутываются и получают неверные результаты.

2. $0{,}2^{\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}} \geqslant 1.$

Не учитывая свойства показательной функции $f(t) = 0{,}2^t$, учащиеся производят различные преобразования, в то время как из монотонности функции $f(t) = 0{,}2^t$ следует, что при всех значениях x, входящих в область определения функции $t = \frac{2x-1}{x-1}$, где $\frac{2x-1}{x-1} \geqslant 0$, а следовательно, $t \geqslant 0$, данная функция не может принимать значения, большие единицы. Следовательно, решение данного неравенства сводится к решению уравнения $\frac{2x-1}{x-1} = 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$.

3. $\log_2^2\left(\frac{4x-3}{4-3x}\right) > -\frac{1}{2}.$

Решение.

Выражение $\log_2^2\left(\frac{4x-3}{4-3x}\right) = \left(\log_2 \frac{4x-3}{4-3x}\right)^2$ неотрицательно при всех значениях x, входящих в область определения функции $y = \log_2 \frac{4x-3}{4-3x}$. Следовательно, достаточно решить неравенство $\frac{4x-3}{4-3x} > 0$, множество решений которого и является решением данного неравенства. Метод интервалов дает это множество: $\left]\frac{3}{4};\ \frac{4}{3}\right[$.

В заключение еще раз подчеркнем значение при повторении различных таблиц, схем, памяток, образцов решений основных типов логарифмических и показательных уравнений и неравенств.

Приведем пример такой памятки.

Решая логарифмические уравнения и неравенства, помните:

1. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ равносильно смешанной системе $\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) = \varphi(x), \end{cases}$ где система $\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$ определяет область допустимых значений переменной, так как под знаком логарифма может быть только положительное число.

2. Уравнение $\log_{t(x)} f(x) = b$ равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ t(x) > 0,\ t(x) \neq 1 \\ (t(x))^b = f(x), \end{cases}$$

где система $\begin{cases} f(x) > 0 \\ t(x) > 0,\ \ t(x) \neq 1 \end{cases}$ определяет область допустимых значений переменной.

3. Уравнение $\log_a f(x) + \log_a \varphi(x) = \log_a t(x)$ можно преобразовать к виду $\log_a f(x)\varphi(x) = \log_a t(x)$, для решения которого составляется смешанная система

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ t(x) > 0 \\ f(x)\cdot\varphi(x) = t(x), \end{cases}$$

где система

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ t(x) > 0 \end{cases}$$

определяет область допустимых значений переменной.

4. Неравенство $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$, где $a > 0$ и $a \neq 1$:

а) при $a > 1$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) > \varphi(x), \end{cases}$

где система $\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$ определяет область допустимых значений переменной;

б) при $0 < a < 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) < \varphi(x). \end{cases}$$

Замечание. Равносильность уравнений может быть записана и в другом виде:

1. $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x) \\ f(x) > 0. \end{cases}$
2. $\log_a f(x) + \log_a \varphi(x) = \log_a t(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\,\varphi(x) = t(x) \\ f(x) > 0. \end{cases}$
3. $\log_{t(x)} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (t(x))^b = f(x) \\ t(x) > 0,\ t(x) \neq 1. \end{cases}$

На наш взгляд, такая запись без выделения системы, определяющей область допустимых значений переменной, не будет понятна всем учащимся, поэтому о ней мы говорим, но не требуем от всех учащихся ее применения.

М. Бейсенов,
В. А. Гусев,
М. Е. Есмуханов

ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Непрерывность функции является одним из фундаментальных понятий, посредством которого обосновываются многие положения в математике, поэтому закономерно, что оно изучается в курсе «Алгебра и начала анализа» IX—X классов. В этом курсе дается определение непрерывности функции в точке, рассматриваются примеры непрерывных и разрывных функций. Широко используется понятие непрерывности при изучении свойств элементарных функций, при изучении дифференцируемости функции. Понятие непрерывности функции в области ее задания, в частности на отрезке, используется в основном курсе лишь в неявном виде (например, при доказательстве существования корня квадратного из $a > 0$). Широкое использование свойств непрерывных функций на факультативных занятиях, изучение и, в особенности, применение этих свойств, равно как свойств дифференцируемых функций, к решению задач школьной математики важны для углубленного изучения школьного курса сильными учащимися.

В настоящей статье излагается методика применения свойств непрерывных и дифференцируемых функций к решению различных задач, которые могут быть рассмотрены на факультативных и внеклассных занятиях в старших классах средней школы.

1. Теорема о промежуточном значении непрерывной монотонной функции

Т е о р е м а. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и монотонна (возрастает или убывает) на $[a; b]$; пусть A и B — значения, которые эта функция принимает в концах отрезка $[a; b]$, и $A < B$. Тогда каково бы ни было число $C \in [A; B]$, существует такая единственная точка $c \in [a; b]$, что $f(c) = C$.*

Доказательство этой теоремы можно найти в любом курсе математического анализа (см. [8, с. 96]), а также в различных учебных пособиях, адресованных учащимся (см., например, [1, с. 172]).

На факультативе достаточно пояснить ее геометрический смысл: непрерывная линия, соединяющая точки $M(a; f(a))$ и $N(b, f(b))$, пересекает каждую прямую $y = C$; при этом, если f монотонна, то пересечение единственно.

У учащихся не должно сложиться впечатления, что таким свойством обладает любая функция. Поэтому следует привести пример функции, не удовлетворяющей условию теоремы.

Если отбросить требование непрерывности функции на отрезке $[a; b]$, *то функция может и не пересекать прямую* $y = c$. *Если же* функция не монотонна, то некоторые из прямых $y = c$ ее график пересекут не в одной точке.

Из этого свойства, в частности, вытекает, что если функция f определена и непрерывна на всей числовой оси, т. е. в промежутке $]-\infty; +\infty[$, то множество значений функции f на этом промежутке представляет промежуток одного из видов: $[A; B]$, $]A; B]$, $[A; B[$, $]-\infty; +\infty[$ и т. д.

Поэтому сформулированное выше свойство остается верным и в этом случае, когда функция f непрерывна и монотонна в конечном или бесконечном промежутке.

Рассмотрим алгоритм применения теоремы о промежуточном значении непрерывной монотонной функции к доказательству существования и единственности корней уравнений вида $f(x) = C$, где f строго монотонна и непрерывна в области определения.

1. Найдем область определения функции f.
2. Исследуем функцию $y = f(x)$ на непрерывность и монотонность в области ее определения и найдем ее множество значений.
3. Выясняем, принадлежит ли C множеству значений функций f. Если это условие выполняется, то в силу монотонности непрерывной функции f, исходное уравнение имеет единственное решение. Это решение может быть в ряде случаев найдено точно или приближенно.

Если же C не принадлежит множеству значений функции f, то данное уравнение действительных корней не имеет. Это важно знать, чтобы избавить решающего от бесцельных поисков.

Рассмотрим примеры:

1. Решить уравнение

$$\arccos x + \arccos x\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Здесь рассматриваются две функции: $y_1 = \arccos x$ и $y_2 = \arccos x\sqrt{3}$, убывающие и непрерывные на отрезке $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, поэтому $y = y_1 + y_2$ — непрерывная, убывающая функция в указанном промежутке*.

---

* Здесь мы воспользовались тем, что сумма убывающих функций есть функция убывающая.

Множество значений функции $y = y_1 + y_2$ — отрезок

$$\left[y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\ y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \left[\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + \arccos 1;\ \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \right.$$

$$\left. + \arccos(-1)\right] = \left[\arccos\frac{1}{\sqrt{3}};\ 2\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Кроме того,

$$\frac{\pi}{2} \in E(f) = \left[\arccos\frac{1}{\sqrt{3}};\ 2\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень. Этот корень $x = \frac{1}{2}$ можно найти подбором.

Второй пример еще более убедит читателя в том, что предлагаемый нами способ, нацеливающий учащихся на предварительное исследование уравнения, иногда значительно рациональнее традиционных способов.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{4x-1} + \sqrt{3x+2} = 3.$$

Решение. Здесь рассматриваемая функция $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{4x-1} + \sqrt{3x+2}$ на отрезке $[1; +\infty[$ непрерывна и строго возрастает, достигая своего наименьшего значения при $x = 1$. Находим $y_{\min} = y(1) = \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Так как $3 < \sqrt{3} + \sqrt{5} = y_{\min}$, то $3 \notin E(f)$. Поэтому данное уравнение действительных корней не имеет.

Приведем еще примеры уравнений, к решению которых можно применить этот способ.

3. $\sin x + \cos x = \sqrt[3]{3}$. (Ответ. Решений нет.)

4. $\arccos x + \arccos x\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$. (Подбором находим корень $x = \frac{1}{2}$ и доказываем, что он единственный.)

5. $2^x - 3^{\frac{x}{2}} = 1$. (Ответ. Единственный корень 3.)

Из примеров видно, что во многих случаях приходится подбирать корень. Такой способ, соединенный со строгим доказательством единственности, часто встречается при решении нестандартных задач и полезно показать его на факультативе.

Указанное свойство непрерывной функции применяется также и при решении различных задач прикладного характера, в частности по геометрии и физике.

6. Стороны параллелограмма равны a и b. Каким должен быть угол между ними и какому условию должно удовлетворять число c, чтобы оно выражало площадь параллелограмма?

Решение. Известно, что площадь параллелограмма вычисляется по формуле $S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$, т. е. здесь значение площади

S является непрерывной функцией α (величины угла между сторонами a и b). Областью определения функции S будет промежуток $D(S) =]0; \pi[$. Так как $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, то достаточно рассмотреть данную функцию в промежутке $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, где она непрерывна и монотонна. Тогда $E(S) =]0; ab]$. Чтобы данное число c выражало площадь параллелограмма S, согласно свойству непрерывной монотонной функции необходимо и достаточно выполнения условия $c \in]0; ab]$. Соответствующее значение аргумента α найдем, решая уравнение $c = ab\sin\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{c}{ab} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{c}{ab}$. Но так как α может быть еще и тупым, то кажется, что задача имеет два решения: $\alpha_1 = \arcsin\frac{c}{ab}$; $\alpha_2 = \pi - \arcsin\frac{c}{ab}$. Но оба решения определяют конгруэнтные параллелограммы.

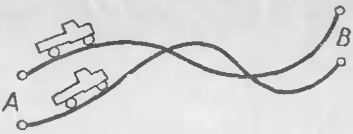


Рис. 1

7. Из города A в город B ведут две дороги, каждая из которых не имеет самопересечений. Докажите, что если две машины M_1 и M_2 могут выехать одновременно из A по этим дорогам и проехать в B так, что расстояние между машинами ни в какой момент пути не будет превосходить 20 м (рис. 1), то две круглые платформы радиуса 11 м не смогут выехать одновременно из A и B и из B в A и проехать по этим дорогам не столкнувшись.

Решение. Пусть в некоторый момент времени положение машины на первой дороге l_1 изображается точкой X оси x, а положение машины на второй дороге l_2 — точкой Y оси y, $|Ox|$ — путь, пройденный точкой, считая от A, $|OB_1|$ — длина первой дороги; аналогичный смысл имеют $|Oy|$ и $|OB_2|$. Тогда положение этих двух машин (одной на l_1, другой на l_2) изобразится точкой Z прямоугольника OB_1CB_2 (рис. 2). Все точки Z, изображающие положения машин M_1 и M_2 в каждый момент t движения, образуют некоторую непрерывную кривую, которая проходит через точки O и C.

Вопреки условию задачи предположим, что каким-то образом можно осуществить указанное передвижение платформ. Тогда аналогично получим еще одну кривую, соединяющую B_2 и B_1. Но непрерывные кривые OC и B_1B_2, соединяющие противоположные вершины прямоугольника OB_1CB_2, обязательно должны пересечься в некоторой точке Z (это — непосредственное следствие непрерывности наших кривых). Точке Z отвечают такие точки на дорогах l_1 и l_2, что рас-

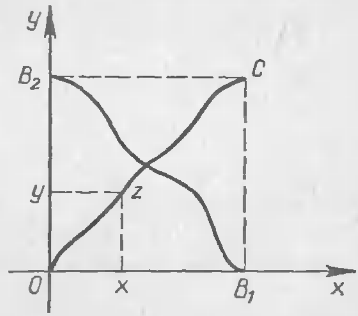


Рис. 2

стояние между этими точками не превосходит 20 м (ибо эта точка принадлежит линии OC, изображающей движение машины). Но это значит, что еще до того, как платформы (движение которых изображается линией B_1B_2) достигнут положения, изображаемого точкой Z, они неминуемо столкнутся (ибо расстояние между центрами платформ должно превышать 22 м).

2. Теорема об обращении непрерывной функции в нуль

Одним из важных и наиболее наглядных свойств непрерывной функции является свойство об обращении непрерывной функции в нуль. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, имеет на концах отрезка значения разных знаков, т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то внутри этого отрезка найдется хотя бы одно значение аргумента $x = c$, при котором функция обращается в нуль ($f(c) = 0$).*

Доказательство этого свойства не рассматривается в школьных учебниках.

Это свойство также наглядно иллюстрируется геометрически. Точка, двигаясь по непрерывной линии, не может перейти из нижней полуплоскости в верхнюю полуплоскость или, наоборот, из верхней полуплоскости в нижнюю полуплоскость, не пересекая при этом оси абсцисс хотя бы один раз.

Указанное свойство может быть использовано для установления существования корней уравнения $f(x) = 0$, где f — непрерывная функция, а также для их приближенного вычисления*.

Рассмотрим алгоритм решения таких уравнений:

1. Найдем область определения функции f. Для определенности считаем, что областью определения функции f является отрезок $[a; b]$.

2. Установив непрерывность и монотонность функции f, проверяем выполнимость условия $f(a) \cdot f(b) < 0$. Если это условие не выполняется и имеет место $f(a) \cdot f(b) > 0$, то уравнение решений не имеет. А если же имеет место равенство $f(a) \cdot f(b) = 0$, то либо a, либо b являются корнями данного уравнения.

Приведем примеры на применение указанного свойства:

1. Решить уравнение

$$x^4 - x - 1 = 0.$$

Решение. Здесь функция $f(x) = x^4 - x - 1$ определена и непрерывна на множестве всех действительных чисел (R). Возьмем, например, в качестве значений x из области определения числа

---

* В случае если функция $y = f(x)$ строго монотонна, мы можем утверждать и единственность корня.

1 и 2. Мы видим, что $f(1) = -1$, $f(2) = 13$, т. е. $f(1) \cdot f(2) = -13 < 0$. Это означает, что у данного уравнения на отрезке $[1; 2]$ существует по крайней мере один действительный корень. Однако решить вопрос о количестве действительных корней данного уравнения нельзя без выяснения монотонности данной функции на отрезке $[1; 2]$. А этот вопрос можно решить с помощью производной. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = (x^4 - x - 1)' = 4x^3 - 1 =$$
$$= (\sqrt[3]{4x} - 1)(\sqrt[3]{16x^2} + \sqrt[3]{4x} + 1).$$

Нетрудно заметить, что при $x \geqslant 1$ производная $f'(x) > 0$, т. е. рассматриваемая функция в промежутке $[1; 2]$ возрастает. Из всего этого следует, что в указанном промежутке данное уравнение имеет один действительный корень.

Найдем приближенно этот корень, для чего разделим отрезок $[1; 2]$ на 10 равных частей и последовательно вычислим:

$f(1{,}1) = -0{,}63$, $f(1{,}2) = -0{,}11$, $f(1{,}3) = 0{,}55$ ...

Так как $f(1{,}2) \cdot f(1{,}3) < 0$, то заключаем, что положительный корень уравнения содержится между 1,2 и 1,3. Тем самым вычислено значение корня с точностью до 0,1. Этот процесс приближения к корню можно продолжить, получая значения с нужной степенью точности. Аналогично можно найти приближенно и другой корень уравнения: так как $f(-1) = 1$, а $f(0) = -1$, то $f(-1) \cdot f(0) = -1 < 0$ и, следовательно, отрицательный действительный корень исходного уравнения находится на отрезке $[-1; 0]$.

Для отыскания интервалов, на которых уравнение имеет единственный корень или, как говорят, для отделения корней полезно найти промежутки монотонности. Рассмотрим пример:

2. Решить уравнение

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Здесь функция $f(x) = x^3 - 3x + 1$ непрерывна на всей числовой оси, т. е. $D(f) =]-\infty; +\infty[$. Для определения интервалов монотонности решаем уравнение $f'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Промежутками строгой монотонности этой функции будут $]-\infty; -1[$, $]-1; 1[$, $]1; +\infty[$. Поэтому данное уравнение в каждом из указанных интервалов может иметь не более одного действительного корня. Сначала найдем меньший корень.

Найдя $f(-1) = 3$ и $f(1) = -1$, убедимся, что на интервале $]-1; 1[$ уравнение имеет единственный корень. Так как $f(0) = 1$ и, значит, $f(0) \cdot f(1) < 0$, то этот корень $x_1 \in]0; 1[$.

Чтобы найти другие корни, нужно подобрать конечный интервал, удовлетворяющий условию теоремы. Например, исходя из того, что $f(1) < 0$, проверяем точки $x = 2$, $x = 3$ и т. д. Получим $f(2) = 1$, и, значит, искомый корень лежит на интервале $]1; 2[$.

Указанным выше способом можем вычислить корни с любой степенью точности.

Рассмотренное свойство применяется и при решении геометрических задач. Рассмотрим некоторые из них:

3. Доказать, что около любой замкнутой кривой на плоскости можно описать квадрат.

Решение. Пусть на плоскости дана некоторая замкнутая линия L (рис. 3).

Выберем в плоскости произвольную точку O и из нее проведем фиксированный луч OP (от которого будем вести отсчет углов) и подвижный луч OR (луч OR будем вращать вокруг точки O против часовой стрелки).

Каждому положению луча OR соответствует вполне определенный прямоугольник, описанный около линии L. Этот прямоугольник образуется двумя опорными прямыми AB и CD*, параллельными лучу OR, и двумя опорными прямыми AC и BD, ему перпендикулярными. Из геометрических соображений следует, что стороны прямоугольника $ABCD$ являются непрерывными функциями угла x, образуемого лучами OR и OP. Пусть

$$|AB| = \varphi(x),$$
$$|AC| = \psi(x),$$
$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

При $x = x_1$ имеем: $\varphi(x) = a_1,\ a_1 < b_1,$

$$\psi(x) = b_1.$$

Тогда $f(x_1) = a_1 - b_1 < 0$.

Очевидно, при увеличении угла x_1 на 90° стороны AB и AC поменяются ролями и мы получим:

$$\varphi\left(x_1 + \frac{\pi}{2}\right) = b_1,\quad \psi\left(x_1 + \frac{\pi}{2}\right) = a_1.$$

Поэтому $f\left(x_1 + \frac{\pi}{2}\right) = b_1 - a_1 > 0$.

Таким образом, функция $f(x)$ обладает следующими свойствами:

1) она непрерывна на отрезке $\left[x_1; \frac{\pi}{2} + x_1\right]$;

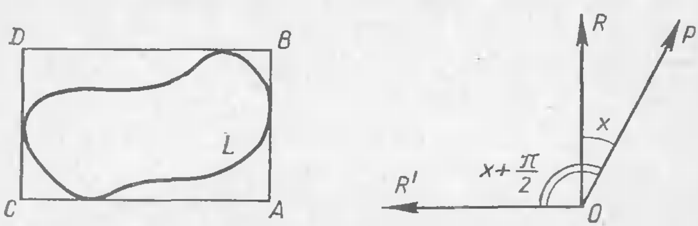


Рис. 3

* Опорной прямой данной фигуры называется всякая прямая, имеющая с ней общую точку, и такая, что вся фигура лежит по одну сторону от этой прямой.

2) принимает на его концах значения различных знаков.

Следовательно, по указанному свойству непрерывной функции в промежутке $\left]x_1;\ x_1 + \frac{\pi}{2}\right[$ найдется такой угол $x = x_0$, что $f(x_0) = 0$, или $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$. Тем самым доказано, что около любой замкнутой кривой на плоскости можно описать квадрат.

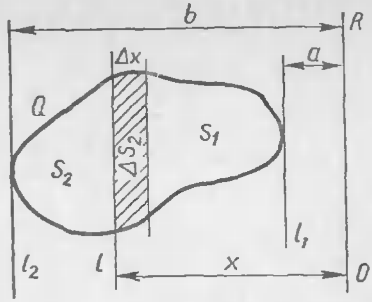


Рис. 4

Разумеется, это доказательство не может считаться строгим (например, не доказано существование опорной прямой любого направления, непрерывность рассматриваемой функции также считается очевидной и т. д.), однако его рассмотрение полезно, так как развивает интуицию.

4. Доказать, что существует прямая, делящая плоскую фигуру на равновеликие части.

Р е ш е н и е. Пусть дана некоторая плоская фигура Q (т. е. часть плоскости, ограниченная замкнутой кривой) (рис. 4).

Возьмем на плоскости фиксированный луч OR и подвижный луч l, перемещающийся параллельно лучу OR. Каждое положение луча l будет характеризовать его расстоянием x от луча OR. Обозначим через S_1 (S_2) площадь той части фигуры Q, которая расположена вправо (влево) от луча l.

Нетрудно показать, что величины S_1 и S_2 являются непрерывными функциями переменного x*:

$$S_1 = S_1(x),\ S_2 = S_2(x).$$

Определим функцию $f(x)$ равенством

$$f(x) = S_1(x) - S_2(x).$$

Предположим, что l_1 и l_2 есть опорные прямые данной фигуры, параллельные OR, и a, b — соответственно их расстояния от луча OR. Пусть $a < b$, очевидно, что при $x = a$ имеем $S_1(x) = 0$, а при $x = b$ имеем: $S_2(x) = 0$. Поэтому

$$f(a) < 0,\ f(b) > 0.$$

Так как функция f непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то по указанному свойству непрерывной функции найдется такое значение

* Действительно, возьмем какое-нибудь значение $x \in [a;\ b]$ и положим $\Delta S_1 = S_1(x + \Delta x) - S_1(x)$. Если обозначить через d наибольшее расстояние между точками контура данной фигуры, то совершенно очевидно, что $|\Delta S_1| < d\,|\Delta x|$. Следовательно, $\Delta S_1 \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а это и означает, что функция $S_1(x)$ непрерывна в точке x. Аналогично доказывается, что $S_2(x)$ также непрерывна в точке x.

$x = c$ $(a < c < b)$, что $f(c) = 0$ и, следовательно, $S_1(c) = S_2(c)$; иначе говоря, найдется луч l, который делит площадь фигуры на две равновеликие части.

3. Свойство знакопостоянства непрерывной функции

Теорема. *Если непрерывная функция $y = f(x)$ определена при всех значениях в интервале $]a; b[$ и если в этом интервале нет корней уравнения $f(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ сохраняет знак в $]a; b[$.*

Доказательство. Предположим, что в интервале $]a; b[$ существуют два числа $\alpha \in]a; b[$ и $\beta \in]a; b[$ такие, что $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$. Тогда на отрезке $[\alpha; \beta]$ для заданной функции применима теорема об обращении непрерывной функции в нуль, согласно которой в интервале $]\alpha; \beta[$ найдется хотя бы одно число $\gamma \in]\alpha; \beta[$ такое, что $f(\gamma) = 0$. Так как $[\alpha; \beta] \subset]a; b[$, то $\gamma \in]a; b[$. Значит, внутри данного интервала нашлась точка γ, в которой функция $y = f(x)$ обращается в нуль, что противоречит условию.

Доказанное свойство позволяет решать неравенства вида $f(x) \gtrless 0$, где f — непрерывная функция на некотором интервале $]a; b[$.

Приведем алгоритм решения таких неравенств:

1. Находим область определения функции и исследуем ее на непрерывность. В школе $D(f)$ обычно является объединением промежутков, причем f — непрерывна в любой точке $D(f)$. Пусть, например, $D(f) = [a; b] \cup]c; d]$.

2. Находим нули функции. Пусть, например, $f(x) = 0$ при $x_1 = \alpha \in [a; b]$ и $x_2 = \beta \in [a; b]$ и $\alpha > \beta$.

Тогда на каждом из промежутков $[a; \alpha[$, $]\alpha; \beta[$; $]\beta; b]$ и $]c; d[$ непрерывная функция f не обращается в нуль и, следовательно, знакопостоянна.

3. Для решения неравенства $f(x) \gtrless 0$ остается определить знак в каждом из промежутков, найдя ее значение в какой-либо его точке.

Приведем примеры.

1. Решить неравенство

$$\sqrt{1 - x} < \sqrt[4]{5 + x}.$$

Решение. Поставленную задачу можно сформулировать следующим образом: найти те значения x, для которых функция $f(x) = \sqrt{1 - x} - \sqrt[4]{5 + x}$ принимает отрицательные значения. На $D(f) = [-5; 1]$ функция f непрерывна, как разность двух непрерывных функций.

Найдем нули функции:

$$\sqrt{1 - x} - \sqrt[4]{5 + x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x} = \sqrt[4]{5 + x} \Leftrightarrow (1 - x)^2 =$$

$= 5 + x$, откуда $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$. Так как $4 \notin D(f)$, то нулем функции f является только корень $x_1 = -1$.

Исследуем знак функции $y = f(x)$ на каждом из промежутков $[-5; -1[$ и $]-1; 1]$. Так как $f(-3) = 2 - \sqrt[4]{2} > 0$, а $f(0) = 1 - \sqrt[4]{5} < 0$, то функция f в промежутке $[-5; -1[$ положительна, а в промежутке $]-1; 1]$ отрицательна и решением исходного неравенства будет промежуток $]-1; 1]$.

2. Найти все решения неравенства $\sqrt{3 \cos 2x} > \sqrt{2} \cos x$, удовлетворяющие условию $-\pi < x < \pi$.

Решение. Пусть $y_1 = \sqrt{3 \cos 2x}$ и $y_2 = \sqrt{2} \cos x$. Из условия $\cos 2x \geqslant 0$ находим: $D(y_1) = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Так как $D(y_2) = R$, то для решения задачи следует рассмотреть интервал $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cap \left]-\pi; \pi\right[= \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Функция $y = y_1 - y_2$ на этом отрезке непрерывна, как разность двух непрерывных функций. Теперь находим нули функции:

$$\sqrt{3 \cos 2x} - \sqrt{2} \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3 \cos 2x} = \sqrt{2} \cos x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 \cos 2x = 2 \cos^2 x \Leftrightarrow 3(2\cos^2 x - 1) = 2\cos^2 x \Leftrightarrow 4\cos^2 x =$$
$$= 3 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4}, \; x_{1,2} = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, \; k < \in Z.$$

Таким образом, рассматриваемая функция $y = y_1 - y_2$ знакопостоянна в промежутках:

$$\left[-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}\right[, \; \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right[, \; \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right[.$$

Установим знак функции f в каждом из этих интервалов:

$$-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}\right[\text{ и } f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 < 0, \; \forall \left(x \in \left[-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}\right[\right) : f(x) < 0;$$

$$0 \in \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right[\text{ и } f(0) = \sqrt{3} - \sqrt{2} > 0, \; \forall \left(x \in \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right[\right) : f(x) > 0;$$

$$\frac{\pi}{4} \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right[\text{ и } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 < 0, \; \forall \left(x \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]\right) : f(x) < 0.$$

Отсюда видно, что рассматриваемая функция f в интервале $\left]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right[$ положительна, а в промежутках $\left[-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}\right[$ и $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$ отрицательна. Следовательно, решением данного неравенства является интервал $\left]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right[$.

Такой подход значительно облегчает решение неравенств и вносит полную ясность в каждый этап решения.

Прием выделения промежутков знакопостоянства полезно применять и к решению уравнений (неравенств), содержащих знак модуля.

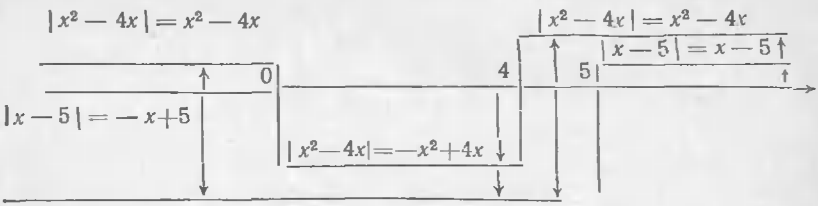
Алгоритм решения таких уравнений (неравенств) рассмотрим на примерах:

3. Решить уравнение

$$|x^2 - 4x| + 3 = x^2 + |x - 5|.$$

Р е ш е н и е. Функции $f_1(x) = x^2 - 4x$ и $f_2(x) = x - 5$ на множестве всех действительных чисел определены и непрерывны. Нули $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ разделяют множество всех действительных чисел на промежутки $]-\infty; 0[$, $[0; 4[$, $[4; 5[$, $[5; +\infty[$, в каждом из которых подмодульные выражения знакопостоянны, и потому уравнение можно записать без знака модуля.

Схематически это можно изобразить так:



Данное уравнение будет равносильно такой совокупности систем:

1) $\begin{cases} x \leqslant 0,\ 4 \leqslant x \leqslant 5 \\ x^2 - 4x + 3 = x^2 - x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, 4 \leqslant x \leqslant 5 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}.$

2) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ -x^2 + 4x + 3 = x^2 - x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 2.$

3) $\begin{cases} x \geqslant 5 \\ x^2 - 4x + 3 = x^2 + x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 5 \\ 5x = 8 \end{cases} \Rightarrow x \in \{\Phi\}.$

Таким образом, множеством решений данного уравнения будет:

$$x = \left\{-\frac{2}{3};\ \frac{1}{2};\ 2\right\}.$$

4. Признак постоянства дифференцируемой функции

Теорема. *Пусть функция f определена и непрерывна на $[a; b]$ и имеет на интервале $]a; b[$ производную. Тогда для того, чтобы f была на $[a; b]$ постоянной, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ (для всех $x \in]a; b[$).*

Указанное свойство можно применить к доказательству тождеств вида $\varphi(x) = \psi(x)$, где φ и ψ — непрерывно дифференцируемые функции, имеющие одинаковые области определения.

Алгоритм доказательства таких тождеств сводится к следующему:

1. Составим функцию $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ (или $f(x) = \psi(x) - \varphi(x)$).

2. Находим $D(f)$ (она совпадает с областью допустимых значений исходного тождества).

3. Убедившись в том, что $f'(x) = 0$ в каждой точке области определения, заключаем, что $f(x) = \text{const}$.

4. Показываем, что $f(x) = 0$ для какой-либо точки из области определения. Тогда,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) - \psi(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \equiv \psi(x).$$

Рассмотрим примеры:

1. Доказать тождество

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \arccos(-x) + \arccos x - \pi$, определенную и непрерывную на промежутке $D(f) = [-1; 1]$

$$f'(x) = (\arccos(-x) + \arccos x - \pi)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Так как $f'(x) = 0$, то $f(x) = C$, т. е.

$$\arccos(-x) + \arccos x - \pi = C.$$

Для определения постоянной C дадим переменной x какое-нибудь значение, например $x = 0 \in D(f) = [-1; 1]$.

Тогда $C = f(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = 0.$

Значит,

$$\arccos(-x) + \arccos x - \pi = 0 \Rightarrow \arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$

и искомое тождество доказано.

2. Доказать тождество

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \text{ при } -\infty < x < +\infty.$$

5. Отыскание наибольших и наименьших значений функции

Признаки возрастания (и убывания) дифференцируемой функции, правило отыскания наибольших (наименьших) значений можно применить к доказательству неравенства вида $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$, где φ и ψ — дифференцируемые функции, имеющие одинаковые области определения.

Рассмотрим примеры:

1. Доказать, что при $x > \frac{2}{3}$ имеет место неравенство

$$x^2 - x^3 < \frac{1}{6}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - x^3 - \frac{1}{6}$ в промежутке $D(f) = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$. Она в указанном промежутке непрерывна и дифференцируема.

Вычислим ее производную:

$$f'(x) = 2x - 3x^2.$$

Так как $f'(x) < 0$ при всех $x \in \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$, то функция f на промежутке $\left[\frac{2}{3}; \infty\right[$ убывает. Поэтому при $x > \frac{2}{3}$ имеем: $f(x) < f\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - x^3 - \frac{1}{6} < 0 \Rightarrow x^2 - x^3 < \frac{1}{6}$.

Итак, истинность исходного неравенства доказана.

2. Доказать, что

$$-2 \leqslant a^3 - 3a \leqslant 2 \text{ при } -1 \leqslant a \leqslant 1.$$

Указание: найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-1; 1]$.

Как видно из примеров, применение этого способа достаточно просто, особенно если использовать графические иллюстрации, но требует от учащихся некоторой изобретательности, что и делает его особенно ценным.

3. Доказать, что при $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $\alpha - \sin\alpha < \beta - \sin\beta$.

Решение. Рассмотрим в промежутке $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ функцию $f(x) = x - \sin x$. Найдем ее производную: $f'(x) = (x - \sin x)' = 1 - \cos x$.

Так как $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то, значит, функция $f(x)$ в промежутке $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ возрастает и поэтому при $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ $f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow \alpha - \sin\alpha < \beta - \sin\beta$.

Следовательно, исходное неравенство истинно.

4. Доказать, что при $n \in N$ и $n > 1$ имеет место неравенство

$$3^n > n + 2.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 3^x - (x + 2)$ в промежутке $D(f) =]1; +\infty[$. Эта функция в указанном промежутке дифференцируема как разность двух дифференцируемых функций.

Далее исследуем функцию на монотонность. Для этого найдем ее производную:

$$f'(x) = (3^x - x - 2)' = 3^x \cdot \ln 3 - 1.$$

Функция $y = 3^x$ на промежутке $D(f) =]1; +\infty[$ возрастающая; значит, $f'(x) = 3^x \ln 3 - 1 \geqslant 3 \cdot \ln 3 - 1 > 3 \cdot 1{,}0986 - 1 > 0$.

Следовательно, $f(x)$ в промежутке $]1; +\infty[$ возрастающая. Поэтому при $n > 1$ имеем: $f(n) > f(1) = 0$; т. е. $3^n - (n + 2) > > 0 \Rightarrow 3^n > n + 2$.

Таким образом, истинность данного неравенства доказана.

Библиотека учителя математики

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

СОСТАВИТЕЛИ: ЕЛЕНА ГЕОРГИЕВНА ГЛАГОЛЕВА,
ОЛЕГ СЕРГЕЕВИЧ ИВАШЕВ-МУСАТОВ

Редактор *Г. С. Уманский*
Художник *Б. М. Юдкин*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *Н. Д. Стерина*, *С. Н. Терехова*
Корректор *Р. Б. Штутман*

ИБ № 4576

Сдано в набор 17.03.80. Подписано к печати 08.01.81. $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 2. Гарн. литер. Печать высокая. Усл. печ. л. 16. Уч.-изд. л. 16,28. Тираж 250 000 экз. Заказ 343. Цена 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов. ул. Чернышевского, 59.

60 коп.